Gabarito do Trabalho de MA111.

Observação: Neste trabalho, os números de a_1 a a_6 representam os números obtidos quando somamos 1 a cada um dos seis dígitos do seu RA.
(**Exemplo:** RA=234095: $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_3 = 5$, $a_4 = 1$, $a_5 = 10$, $a_6 = 6$.)

Questão 1. (3 pontos) Determine os seguintes limites usando a regra de L'Hôspital:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(a_1 x)}{1-e^{a_1 x}}$,

b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{a_2 x^2 - 2x + 1}{(x+2)(x+7a_4)}$,

c) $\lim_{x\to\infty} \left(\cos\frac{2a_3}{x}\right)^{x^2}$.

Solução:

a) Como $\lim_{x\to 0}\sin(a_1 x) = 0 = \lim_{x\to 0} 1 - e^{a_1 x}$, então é possível aplicar a regra de L'Hôspital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a_1 x)}{1-e^{a_1 x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{a_1\cos(a_1 x)}{-a_1 e^{a_1 x}} = \frac{a_1\cos 0}{-a_1 e^0} = -1. \qquad (0,8)$$

b) Como $\lim_{x\to-\infty} a^2x^2 - 2x + 1 = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty}(x+2)(x+7a_4) = +\infty$ podemos aplicar a regra de L'Hôspital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{a_2x^2-2x+1}{(x+2)(x+7a_4)} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{a_2x^2-2x+1}{x^2+(2+7a_4)x+14a_4}\\ &\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{2a_2x-2}{2x+(2+7a_4)} = \frac{\infty}{\infty} \qquad (0,4)\\ &\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{2a_2}{2} = a_2. \qquad (0,4)\end{aligned}$$

c) Seja

$$y = \left(\cos\frac{2a_3}{x}\right)^{x^2}, \qquad \ln y = x^2\ln\left(\cos\frac{2a_3}{x}\right).$$

Note que

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\cos\frac{2a_3}{x}\right)}{1/x^2} = \frac{0}{0}. \qquad (0,3)$$

Aplicando a regra de L'Hôspital, temos

$$\lim_{x\to\infty}\ln y \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-\sin\left(\frac{2a_3}{x}\right)\left(-\frac{2a_3}{x^2}\right)}{\cos\left(\frac{2a_3}{x}\right)}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} -\frac{\sin\left(\frac{2a_3}{x}\right)a_3x}{\cos\left(\frac{2a_3}{x}\right)}. \qquad {\color{red}(0,4)}$$

Tomando $t=\frac{2a_3}{x}$, $\quad x=\frac{2a_3}{t}$, se $x\to\infty$ então $t\to 0$, daí

$$\lim_{x\to\infty} -\frac{\sin\left(\frac{2a_3}{x}\right)a_3x}{\cos\left(\frac{2a_3}{x}\right)} = \lim_{t\to 0} -\frac{\sin t}{\cos t}\frac{2a_3^2}{t} = \lim_{t\to 0} -\frac{\sin t}{t}\frac{2a_3^2}{\cos t} = -2a_3^2, \qquad {\color{red}(0,4)}$$

portanto

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{2a_3}{x}\right)^{x^2} = \exp\left(\lim_{x\to\infty}\ln y\right) = e^{-2a_3^2}. \qquad {\color{red}(0,3)}$$

Questão 2. (4 pontos) Considere a função real dada por

$$f(x) = e^{-a_5x^2+a_6}.$$

Discuta o gráfico dessa função, considerando:

a) (0,1) Domínio máximo,

b) (0,2) Intersecção do gráfico com os eixos coordenados e sinal da função,

c) (0,3) Simetrias,

d) (0,8) Extremos locais, crescimento e decrescimento,

e) (1,0) Pontos de inflexão e concavidade,

f) (0,6) Assíntotas horizontais, verticais e oblíquas, se houver,

g) (0,2) Imagem e

h) (0,8) Esboce o seu gráfico.

Solução:

a) Domínio$(f)=\mathbb{R}$.

b) $f(0)=e^{a_6}$ segue-se que $(0,e^{a_6})$ é a intersecção com o eixo y. Não tem intersecção com o eixo x.

c) Como $f(-x)=f(x)$ a função é par e o gráfico é simétrico em relação ao eixo y.

d) Para estudar crescimento e decrescimento calculamos a primeira derivada $f'(x) = -2a_5 x e^{-a_5x^2+a_6}$.
Como $f'(x) > 0$ se $x < 0$ então f é crescente em $(-\infty, 0)$.
Como $f'(x) < 0$ se $x > 0$ então f é decrescente em $(0, \infty)$.
Daí $x = 0$ é um ponto de máximo local.

e) Para pontos de inflexão calculamos a segunda derivada,

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2a_5 e^{-a_5x^2+a_6} + (-2a_5x)(-2a_5x)e^{-a_5x^2+a_6} = 2a_5(2a_5x^2 - 1)e^{-a_5x^2+a_6} \\ &= 4a_5^2\Big(x - \frac{1}{\sqrt{2a_5}}\Big)\Big(x + \frac{1}{\sqrt{2a_5}}\Big)e^{-a_5x^2+a_6} \end{aligned}$$

Como $f''(x) > 0$ em $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2a_5}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2a_5}}, \infty)$ então f é concava para cima.
Como $f''(x) < 0$ em $(-\frac{1}{\sqrt{2a_5}}, \frac{1}{\sqrt{2a_5}})$ então f é concava para baixo.
Pontos de inflexão são: $-\frac{1}{\sqrt{2a_5}}$ e $\frac{1}{\sqrt{2a_5}}$.

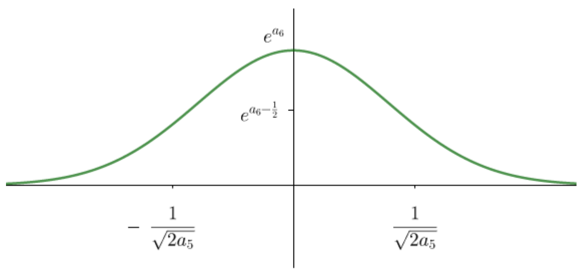
f) Para assintotas horizontais fazemos

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{a_6}e^{-a_5x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{a_6}}{e^{a_5}x^2} = \frac{e^{a_6}}{e^{\infty}} = \frac{e^{a_6}}{\infty} = 0$$

Segue-se que a reta $y = 0$ (eixo x) é assíntota horizontal. Não existem assíntotas verticais pois $\lim_{x\to\pm a} f(x)$ sempre é finito, para todo $a \in \mathbb{R}$.

g) Imagem$(f) = (0, e^{a_6}]$

h)



Questão 3. (3 pontos) Determine os extremos absolutos de

$$f(x) = \frac{x - a_6}{x^2 - (2a_6 + 1)x + (a_6^2 + a_6 + 1)}$$

no intervalo $[a_6 - 1, a_6 + 3]$.

Solução.

O polinômio $x^2 - (2a_6 + 1)x + (a_6^2 + a_6 + 1)$ não possui raízes reais, pois

$$\Delta = (2a_6 + 1)^2 - 4(a_6^2 + a_6 + 1) = 4a_6^2 + 4a_6 + 1 - 4a_6^2 - 4a_6 - 4 = -3 < 0.$$

Assim a função $f(x)$ é contínua em toda a reta, em particular no intervalo $[a_6-1, a_6+3]$. Segue então como consequência do Teorema do Valor Extremo que f assume um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em $[a_6-1, a_6+3]$. (0,5)

Como o polinômio $x^2-(2a_6+1)x+(a_6^2+a_6+1)$ não possui raizes reais, a função $f(x)$ não possui pontos críticos em que a derivada não existe. (0,2)

Temos que

$$\begin{aligned}
&f'(x)\Big[x^2-(2a_6+1)x+(a_6^2+a_6+1)\Big]^2\\
&\quad= 1\Big[x^2-(2a_6+1)x+(a_6^2+a_6+1)\Big]-(x-a_6)\Big[2x-(2a_6+1)\Big]\\
&\quad= x^2-(2a_6+1)x+(a_6^2+a_6+1)-2x^2+(2a_6+1)x+2a_6x-a_6(2a_6+1)\\
&\quad= -x^2+2a_6x+(a_6^2+a_6+1-2a_6^2-a_6)=-x^2+2a_6x-(a_6^2-1)\\
&\quad= -\Big[x^2-2a_6x+(a_6^2-1)\Big]\\
&\quad= -\Big(x-\Big(a_6+1\Big)\Big)\Big(x-\Big(a_6-1\Big)\Big). \qquad (1,0)
\end{aligned}$$

Segue-se que $x_1=a_6+1$ e $x_2=a_6-1$ são os pontos críticos de f. Os candidatos a valores máximo e mínimo absoluto de f em $[a_6-1, a_6+3]$ são

$$f(a_6+3), \quad f(a_6+1), \quad f(a_6-1). \qquad (0,4)$$

Calculando obtemos:

$$\begin{aligned}
f(a_6+3) &= \frac{a_6+3-a_6}{(a_6+3)^2-(2a_6+1)(a_6+3)+(a_6^2+a_6+1)}\\
&= \frac{3}{a_6^2+6a_6+9-2a_6^2-6a_6-a_6-3+a_6^2+a_6+1}=\frac{3}{7}, \qquad (0,2)\\
f(a_6+1) &= \frac{a_6+1-a_6}{(a_6+1)^2-(2a_6+1)(a_6+1)+(a_6^2+a_6+1)}\\
&= \frac{1}{a_6^2+2a_6+1-2a_6^2-2a_6-a_6-1+a_6^2+a_6+1}=\frac{1}{1}=1, \qquad (0,2)\\
f(a_6-1) &= \frac{a_6-1-a_6}{(a_6-1)^2-(2a_6+1)(a_6-1)+(a_6^2+a_6+1)}\\
&= \frac{-1}{a_6^2-2a_6+1-2a_6^2+2a_6-a_6+1+a_6^2+a_6+1}=-\frac{1}{3}. \qquad (0,2)
\end{aligned}$$

Por tanto $f(a_6+1)=1$ é o valor máximo absoluto e $f(a_6-1)=-\frac{1}{3}$ o valor mínimo absoluto da função f. (0,3)