Números Naturais, Inteiros, Racionais e Irracionais

1. Seja a um número inteiro. Prove:

   a) Se a for ímpar, então a^2 também é ímpar.
   b) Se a^2 for par, então a também é par.

2. A equação $x^2 = 2$ não admite solução em $\mathbb{Q}$.

3. Resolva as inequações.

   a) $3x + 2 < x + 6$
   b) $x - 3 > 3x + 1$
   c) $2x - 1 \geq 5x + 3$
   d) $x + 3 \leq 6x - 2$
   e) $1 - 3x > 0$
   f) $3x + 1 \geq 3x$

4. Estude o sinal da expressão.

   a) $3x - 1$
   b) $3 - x$
   c) $2 - 3x$
   d) $\dfrac{2 - 3x}{x + 2}$
   e) $(2x - 1)(3 - 2x)$
   f) $x(x - 3)$

5. Resolva a inequação.

   a) $\dfrac{2x - 1}{x + 1} < 0$
   b) $\dfrac{1 - x}{3 - x} \geq 0$
   c) $x(2x - 1) \geq 0$
   d) $(x - 2)(x + 2) > 0$
   e) $\dfrac{x - 1}{2 - x} > 5$
   f) $(2x - 3)(x^2 + 1) < 0$

6. Verifique as identidades.
   a) $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$
   b) $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1})$

7. Simplifique.

   a) $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$
   b) $\dfrac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{9}}{x - 3}$
   c) $\dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$
   d) $\dfrac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$
   e) $\dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$
   f) $\dfrac{(x + h)^2 - (x - h)^2}{h}$

8. Considere o polinômio de segundo grau $ax^2 + bx + c$ e sejam x_1 e x_2 tais que $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, com $a \neq 0$. Verifique que $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

9. Utilizando o exercício anterior, fatore o polinômio de segundo grau dado.

   a) $x^2 - 3x + 2$
   b) $x^2 - x - 2$
   c) $2x^2 - 3x$
   d) $3x^2 + x - 2$
   e) $4x^2 - 9$
   f) $2x^2 - 5x$

10. Considere o polinômio do segundo grau $ax^2 + bx + c$ e suponha que $\Delta < 0$. Usando que

$$ax^2 + bx + c = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right], \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac$$

mostre que:

a) se $a > 0$, então $ax^2 + bx + c > 0$ para todo x. b) se $a < 0$, então $ax^2 + bx + c < 0$ para todo x.

Módulo de um número real

11. Elimine o módulo.

a) $|-5| + |-2|$ b) $|-9|$ c) $|2a| - |3a|$

12. Resolva as equações.

a) $|x| = 2$ c) $|2x-1| = 1$ e) $|2x+3| = 0$
b) $|x+1| = 3$ d) $|x-2| = -1$ f) $|x| = 2x+1$

13. Resolva as inequações.

a) $|3x-1| < -2$ c) $|2x-3| > 3$ e) $|x-1| - |x+2| > x$
b) $|x-3| < 4$ d) $|x+1| < |2x-1|$ f) $|x-2| + |x-1| > 1$

14. Demostre que:

$$|x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0.$$

15. Demonstre que:

a) $|x-y| \geq |x| - |y|$ b) $|x-y| \geq |y| - |x|$ c) $||x| - |y|| \leq |x-y|$

Intervalos

16. Expresse cada um dos conjuntos abaixo em notação de intervalo.

a) $\{x \in \mathbb{R} | 4x - 3 < 6x + 2\}$ b) $\{x \in \mathbb{R}; |x| < 1\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} | \, |2x-3| \leq 1|\}$

17. Expresse o conjunto das soluções da inequação dada em notação de intervalo:

a) $x^2 - 3x + 2 < 0$ c) $x^2 + x + 1 > 0$
b) $\dfrac{2x-1}{x+3} > 0$ d) $x^2 - 9 \leq 0$

18. Determine $r > 0$ de modo que $(4-r, 4+r) \subset (2,5)$.
19. Expresse a solução da inequação em forma de intervalo: $x(x-1)(x+4) > 0$.
20. Qual é o intervalo solução de $|3x+4| \geq 0$?

Equações e Inequações

21. Resolva as inequações.

a) $2x - 3 < x + 4 < 3x - 2$ c) $(x+1)(x-2)(x+3) \geq 0$
b) $4x < 2x + 1 \leq 3x + 2$ d) $x^3 + 3x < 4x^2$

Referências bibliográficas

[G] L. H. GUIDORIZZI, **Um curso de cálculo**, v.1, LTC, 5 ed, 2001.

[S] J. STEWART, **Cálculo**, v.1, Cengage Learning, 7 ed, 2013.