LISTA 3

Limite e Continuidade

Reta tangente

1. Um tanque com capacidade para 1000 litros de água é drenado pela base em meia hora. Os valores na tabela mostram o volume V de água remanescente no tanque (em litros) após t minutos.

t(min)	5	10	15	20	25	30
V(L)	694	444	250	111	28	0

a) Se P é o ponto $(15, 250)$ sobre o gráfico de V, encontre as inclinações das retas secantes PQ, onde Q é o ponto sobre o gráfico com $t = 5, 10, 15, 20, 25$ e 30.
b) Estime a inclinação da reta tangente em P pela média das inclinações de duas retas secantes.
c) Use um gráfico da função para estimar a inclinação da tangente em P. (Essa inclinação representa a razão na qual a água flui do tanque após 15 minutos.)

2. O ponto $(2, -1)$ está sobre a curva $y = 1/(1 - x)$.
a) Se Q é o ponto $(x, 1/(1 - x))$, use sua calculadora para determinar a inclinação da reta secante PQ, com precisão de seis casas decimais, para os seguintes valores:

(a) 1,5
(b) 1,9
(c) 1,99
(d) 1,999
(e) 2,5
(f) 2,1
(g) 2,01
(h) 2,001

b) Usando os resultados da parte (a), estime o valor da inclinação da reta tangente à curva no ponto $P(2, -1)$.
c) Usando a inclinação da parte (b), encontre uma equação da reta tangente à curva em $P(2, -1)$.

3. Determine o coeficiente angular da curva no ponto P dado e uma equação da reta tangente em P.

a) $y = x^2 - 3$, $P(2, 1)$
b) $y = 5 - x^2$, $P(1, 4)$
c) $y = x^2 - 2x - 3$, $P(2, -3)$
d) $y = x^3$, $P(2, 8)$
e) $y = x^3 - 12x$, $P(1, -11)$
f) $y = x^3 - 3x^2 + 4$, $P(2, 0)$

Taxas de variação

4. Nos exercicios de a)-f), determine a taxa de variação média da função nos intervalos dados.

a) $f(x) = x^3 + 1$, a.$[2, 3]$, b.$[-1, 1]$
b) $g(x) = x^2$, a.$[-1, 1]$, b.$[-2, 0]$
c) $h(t) = cotg(t)$, a.$[\pi/4, 3\pi/4]$, b.$[\pi/6, \pi/2]$
d) $g(t) = 2 + \cos t$, a.$[0, \pi]$, b.$[-\pi, \pi]$
e) $R(\theta) = \sqrt{4\theta + 1}$, $[0, 2]$
f) $P(\theta) = \theta^3 - 4\theta^2 + 5\theta$, $[1, 2]$

5. Faça uma tabela de valores para a função $F(x) = (x + 2)/(x - 2)$ nos pontos $x = 1,2$, $x = 11/10$, $x = 101/100$, $x = 1001/1000$, $x = 10001/10000$ e $x = 1$.
a) Determine a taxa média de variação de $F(x)$ nos intervalos $[1, x]$ para cada $x \neq 1$ em sua tabela.
b) Amplie a tabela, se necessário, para tentar determinar a taxa de variação de $F(x)$ em $x = 1$.

6. Seja $g(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$.
a) Determine a taxa de variação média de $g(x)$ com relação a x nos intervalos $[1, 2], [1, 1, 5]$ e $[1, 1 + h]$.
b) Faça uma tabela de valores da taxa média de variação de g com relação a x no intervalo $[1, 1 + h]$ para alguns valores de h que se aproximem de zero, como $h = 0, 1; 0, 01; 0, 001; 0, 0001; 0, 00001$ e $0; 000001$.
c) O que sua tabela indica é a taxa de variação de $g(x)$ com relação a x em $x = 1$?
d) Calcule o limite, quando h se aproxima de zero da taxa de variação média de $g(x)$ com relação a x no intervalo $[1, 1 + h]$.

7. Seja $f(t) = 1/t$ para $t \neq 0$.
a) Determine a taxa de variação média de f com relação a t nos intervalos.

$i)$ de $t = 2t$ a $t = 3$ $\qquad$ $ii)$ de $t = 2$ a $t = T$

b) Faça uma tabela de valores da taxa média de variação de f com relação a t no intervalo $[2, T]$, para alguns valores de T que se aproximem de 2, como $T = 2,1$; $T = 2,01$; $T = 2,001$; $T = 2,0001$; $T = 2,00001$ e $T = 2,000001$.
c) O que a sua tabela indica é a taxa média de variação de f com relação a t em $t = 2$?
d) Calcule o limite, quando T se aproxima de 2, da taxa média de variação de f com relação a t no intervalo de 2 a T. Você precisará fazer alguns cálculos algébricos antes de substituir $T = 2$.

Limite de uma função e Propriedades dos limites

8. Explique por que o limite não existe.

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$ $\qquad$ b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}$

9. Suponhamos que a função $f(x)$ seja definida para todo x em $[-1, 1]$. O que pode ser dito sobre a existência de $\lim_{x\to 0} f(x)$. Justifique sua resposta.

10. Se $f(1) = 5$, $\lim_{x\to 1} f(x)$ deve existir? Em caso afirmativo, deve ser $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$? Podemos concluir *algo* sobre $\lim_{x\to 1} f(x)$? Explique.

11. Determine os limites.

a) $\displaystyle\lim_{x\to -7}(2x+5)$

b) $\displaystyle\lim_{t\to 6} 8(t-5)(t-7)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -2}(x^3 - 2x^2 + 4x + 8)$

d) $\displaystyle\lim_{s\to 2/3} 3s(2s-1)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to -1} 3(2x-1)^2$

f) $\displaystyle\lim_{y\to 2} \frac{y+2}{y^2+5y+6}$

g) $\displaystyle\lim_{z\to 0}(2z-8)^{1/3}$

h) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5h+4}-2}{h}$

12. Determine os seguintes limites.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{x^2-25}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to -5} \frac{x^2+3x-10}{x+5}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-7x+10}{x-2}$

d) $\displaystyle\lim_{t\to -1} \frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{-2x-4}{x^3+2x^2}$

f) $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{5y^3+8y^2}{3y^4-16y^2}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}{x}$

i) $\displaystyle\lim_{v\to 2} \frac{v^3-8}{v^4-16}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

13. Suponha que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to 0} g(x) = -5$. Especifique quais regras do teorema abaixo são utilizadas para efetuar as etapas $1, 2$ e 3 do cálculo a seguir:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2f(x) - g(x)}{(f(x)+7)^{2/3}} &\overset{1}{=} \frac{\lim_{x\to 0}(2f(x) - g(x))}{\lim_{x\to 0}(f(x)+7)^{2/3}} \\
&\overset{2}{=} \frac{\lim\limits_{x\to 0} 2f(x) - \lim\limits_{x\to 0} g(x)}{(\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+7))^{2/3}} \\
&\overset{3}{=} \frac{2\lim\limits_{x\to 0} f(x) - \lim\limits_{x\to 0} g(x)}{(\lim\limits_{x\to 0} f(x) + \lim\limits_{x\to 0} 7)^{2/3}} \\
&= \frac{(2)(1) - (-5)}{(1+7)^{2/3}} \\
&= \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

Teorema (Leis do Limite). Se L, M, c e k são números reias e

$$\lim_{x\to L} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to M} g(x),$$

então

1. $\lim\limits_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L + M$
2. $\lim\limits_{x\to c}(f(x)-g(x)) = L - M$
3. $\lim\limits_{x\to c}(kf(x)) = kL$
4. $\lim\limits_{x\to c}(f(x)g(x)) = LM$
5. $\lim\limits_{x\to c}(f(x)/g(x)) = L/M$, $M \neq 0$
6. $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^n = L^n$ onde $n \in \mathbb{Z}_+$
7. $\lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$, onde $n \in \mathbb{Z}_+$

14. Suponha que $\lim_{x\to 1} h(x) = 5$, $\lim_{x\to 1} p(x) = 1$ e $\lim_{x\to 1} r(x) = 2$. Especifique quais regras do teorema acima são utilizadas para efetuar as etapas $1, 2$ e 3 do cálculo a seguir:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4 - r(x))} &\overset{1}{=} \frac{\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{5h(x)}}{\lim\limits_{x\to 1}(p(x)(4 - r(x)))} \\
&\overset{2}{=} \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 1} 5h(x)}}{\left(\lim\limits_{x\to 1} p(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to 1}(4 - r(x))\right)} \\
&\overset{3}{=} \frac{\sqrt{5\lim\limits_{x\to 1} h(x)}}{\left(\lim\limits_{x\to 1} p(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to 1} 4 - \lim\limits_{x\to 1} r(x)\right)} \\
&= \frac{\sqrt{(5)(5)}}{(1)(4-2)} \\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

15. Suponha que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 5$ e $\lim\limits_{x\to c} g(x) = -2$. Determine.

a) $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x)$

b) $\lim\limits_{x\to c} 2f(x)g(x)$

c) $\lim\limits_{x\to c}(f(x) + 3g(x))$

d) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{f(x) - g(x)}$

16. Suponha que $\lim_{x\to b} f(x) = 7$ e $\lim_{x\to b} g(x) = -3$. Determine.

a) $\lim_{x\to b}(f(x)+g(x))$

b) $\lim_{x\to b} 4g(x)$

c) $\lim_{x\to b}(f(x)\cdot g(x))$

d) $\lim_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

17. Devido a sua conexão com retas secante, tangente e taxas instantâneas, os limites da forma

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ocorrem com freqüência em cálculo. Avalie os seguintes limites para os valores dados de x e a função f.

a) $f(x) = x^2$, $x = 1$

b) $f(x) = 3x - 4$, $x = 2$

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 7$

d) $f(x) = \sqrt{3x+1}$, $x = 0$

Definição precisa de limite

18. Nos exercícios de a)-f), esboce o intervalo (a, b) no eixo x com o ponto x_0 dentro. Em seguida, determine um valor de $\delta > 0$, de modo que para todo x, $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow a < x < b$.

a) $a = 1$, $b = 7$, $x_0 = 5$

b) $a = 1$, $b = 7$, $x_0 = 2$

c) $a = -7/2$, $b = -1/2$, $x_0 = -3$

d) $a = -7/2$, $b = -1/2$, $x_0 = -3/2$

e) $a = 4/9$, $b = 4/7$, $x_0 = 1/2$

f) $a = 2,7591$, $b = 3,2391$, $x_0 = 3$

19. Cada um dos exercícios a) - h) dá uma função $f(x)$ e números L, x_0 e $\epsilon > 0$. Em cada caso, determine um intervalo aberto em torno de x_0 em que a desilgualdade $|f(x) - L| < \epsilon$ seja verdadeira. Dê então um valor para $\delta > 0$ tal que, para todo x satisfazendo $0 < |x - x_0| < \delta$, a desigualdade $|f(x) - L| < \epsilon$ seja verdadeira.

a) $f(x) = x + 1$, $L = 5$, $x_0 = 4$, $\epsilon = 0,01$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $L = 1$, $x_0 = 0$, $\epsilon = 0,1$

c) $f(x) = \sqrt{x-7}$, $L = 4$, $x_0 = 23$, $\epsilon = 1$

d) $f(x) = 1/x$, $L = 1/4$, $x_0 = 4$, $\epsilon = 0,05$

e) $f(x) = x^2$, $L = 4$, $x_0 = -2$, $\epsilon = 0,5$

f) $f(x) = x^2 - 5$, $L = 11$, $x_0 = 4$, $\epsilon = 1$

g) $f(x) = mx$, $m > 0$, $L = 3m$, $x_0 = 3$, $\epsilon = c > 0$

h) $f(x) = mx + b$, $m > 0$, $L = m + b$, $x_0 = 1$, $\epsilon = 0,05$

20. Cada um dos exercícios a) - d) dá uma função $f(x)$, um ponto x_0 e um número positivo ϵ. Determine $L = \lim_{x\to x_0} f(x)$. Em seguida, determine um número $\delta > 0$ de modo que para todo x

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

a) $f(x) = 3 - 2x$, $x_0 = 3$, $\epsilon = 0,02$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, $x_0 = 2$, $\epsilon = 0,05$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+6x+5}{x+5}$, $x_0 = -5$, $\epsilon = 0,05$

d) $f(x) = 4/x$, $x_0 = 2$, $\epsilon = 0,4$

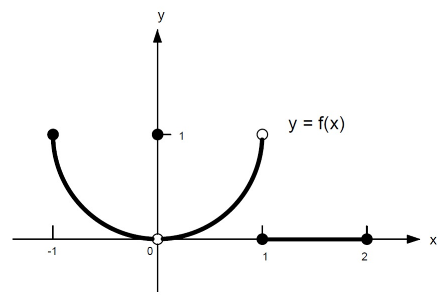
21. Prove as afirmações de limite:

a) $\lim\limits_{x\to 4}(9-x)=5$ b) $\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x-5}=2$ c) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=-6$

d) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$ se $f(x,y)=\begin{cases} x^2 & ,x\neq 1\\ 0 & ,x=1\end{cases}$

Limites laterais

22. Quais afirmações a seguir sobre a função $y=f(x)$ representadas no gráfico são verdadeiras e quais são falsas?



a) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$

c) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$

d) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe

f) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

g) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

h) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$

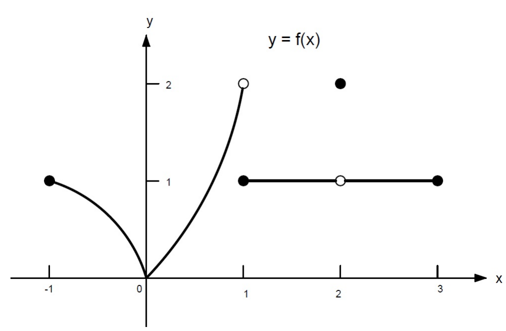
i) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

j) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2$

k) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ não existe

l) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0$

23. Quais afirmações a seguir sobre a função $y=f(x)$ representadas no gráfico são verdadeiras e quais são falsas?



a) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1$

b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ não existe.

c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$

f) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$

g) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ não existe.

h) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe para qualquer c no intervalo aberto $(-1,1)$.

i) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe para qualquer c no intervalo aberto $(1,3)$.

j) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 0$

k) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ não existe.

24. a) Faça o gráfico de

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , x \neq 1 \\ 0 & , x = 1. \end{cases}$$

b) Determine $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.
c) Existe $\lim_{x\to 1} f(x)$? Em caso afirmativo, qual é? Em caso negativo, por que não?

25. a) Faça o gráfico de

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & , x \neq 1 \\ 2 & , x = 1. \end{cases}$$

b) Determine $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x)$
c) Existe $\lim_{x\to 1} f(x)$? Em caso afirmativo, qual é? Em caso negativo, por que não?

26. Faça o gráfico da função $f(x)$ e em seguida, responda:
a) Qual é o domínio e a imagem de f?
b) Em quais pontos c, se houver, $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe?
c) Em quais pontos existe o limite à esquerda?
d) Em que pontos existe o limite à direita?

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , 1 \leq x < 2 \\ 2 & , x = 2 \end{cases}$$

27. Explique o que significa dizer que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 \text{ e } \lim_{x\to 1^+} f(x) = 7$$

Nesta situação, é possível que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ exista? Explique.

28. Determine o limite nos seguintes exercícios.

a) $\displaystyle\lim_{x\to -0{,}5^-} \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$

b) $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$

c) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \operatorname{sen}\theta \cot 2\theta$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{sen} 8x}$

Definição de Função Contínua

29. Prove pela definição, que a função dada é contínua no ponto dado.

a) $f(x) = 4x - 3$ em $p = 2$

b) $f(x) = x + 1$ em $p = 2$

c) $f(x) = -3x$ em $p = 1$

d) $f(x) = x^3$ em $p = 2$

30. Prove que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é contínua para todo $p \neq 0$.

31. A função

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

é contínua em 1? Justifique.

32. Dê exemplo de uma função definida em $\mathbb{R}$ e que seja contínua em todos os pontos, exceto em $-1, -0, 1$.

33. Determine L para que a função seja contínua no ponto dado. Justifique.

$$a) \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{se } x \neq 2 \\ L & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

em $p = 2$

$$b) \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ L & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

em $p = 0$

34. Sabe-se que f é contínua em 2 e que $f(2) = 8$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D_f$

$$2 - \delta < x < 2 + \delta \Rightarrow f(x) > 7.$$

35. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ e suponha que existe $M > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| \leq M|x - p|$ para todo x. Prove que f é contínua em p.

Teorema do Confronto, do Valor Intermediário e de Weierstrass

36. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ tal que para todo $x \neq 1$,

$$-x^2 + 3x \leq f(x) < \frac{x^2-1}{x-1}.$$

Calcule $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ e justifique.

37. Sejam f e g duas funções com mesmo domínio A tais que $\lim_{x \to p} f(x) = 0$ e $|g(x)| \leq M$ para todo x em A, onde $M > 0$ é um número real fixo. Prove que

$$\lim_{x \to p} f(x)g(x) = 0.$$

38. Calcule, caso exista $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, onde f é dada por

$$a) \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$b) \qquad f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

39. Dê exemplo de uma função f tal que $\lim\limits_{x \to p} |f(x)|$ existe, mas $\lim\limits_{x \to p} f(x)$ não exista.

40. Prove que: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)}{|h|} = 0.$

41. Seja $f(x) = x^5 + x + 1$. Justifique a afirmação: f tem pelo menos uma raíz no intervalo $[-1, 0]$.

42. Prove que a equação $x^3 - \dfrac{1}{1+x^4} = 0$ admite ao menos uma ráiz real.

43. Prove que cada um dos conjuntos abaixo admite máximo e mínimo.

a) $\left\{\dfrac{x}{1+x^2}; -2 \leq x \leq 2\right\}$ b) $\left\{\dfrac{x^2+x}{1+x^2}; -1 \leq x \leq 1\right\}$

44. Empregue o Teorema do Confronto para mostrar que

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^3+x^2}\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{x} = 0$$

Ilustre, fazendo os gráficos das funções f, g e h (como no Teorema do Confronto) na mesma tela.

45. Se $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ para $x \geq 0$, encontre $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

Limite Fundamental

46. Calcule.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\operatorname{sen} x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+\operatorname{sen} x}{x^2-\operatorname{sen} x}$

47. Determine os limites nos seguintes exercícios.

a) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{2\theta}}{\sqrt{2\theta}}$

b) $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3y}{4y}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2-x+\operatorname{sen} x}{2x}$

d) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}$

e) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}$

f) $\lim\limits_{\theta \to 0} \theta\cos\theta$

Limites no infinito, Infinitos e Assíntotas

48. Calcule.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^3}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[2 - \dfrac{1}{x}\right]$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{x+3}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2+3x+1}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{5+\dfrac{2}{x}}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2+3}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4-2x+1}{4x^4+3x+2}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}\right]$

49. Calcule.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (4x^4-3x+2)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (5-4x+x^2-x^5)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3-6x+1}{6x^2+x+3}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3-6x+1}{6x^3+2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x^2-2}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2+x}{3+x^2}$

50. Calcule.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x+3}}{2x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2+3}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x+3}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-1}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt[3]{2+3x^3}\right)$

51. Utilize limites para determinar as equações para todas as assíntotas verticais.

a) $y=\dfrac{x^2+4}{x-3}$

b) $y=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-2x+1}$

c) $y=\dfrac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}$

52. Utilize limites para determinar as equações para todas as assíntotas horizontais.

a) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2+1}$

b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x+4}}$

c) $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}$

d) $y=\sqrt{\dfrac{x^2+9}{9x^2+1}}$

Referências bibliográficas

[G] L. H. GUIDORIZZI, **Um curso de cálculo**, v.1, LTC, 5 ed, 2001.

[S] J. STEWART, **Cálculo**, v.1, Cengage Learning, 7 ed, 2013.

[T] G. B. THOMAS, **Cálculo**, v.1, Pearson, 12 ed, 2006.