Tangentes e Derivadas

1. Nos exercícios $a)$ - $f)$, determine o coeficiente angular do gráfico da função no ponto dado. Em seguida, determine uma equação para a reta tangente ao gráfico naquele ponto.

a) $f(x) = x^2 + 1$, $(2, 5)$

b) $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$, $(1, -1)$

c) $g(x) = 8/x^2$, $(2, 2)$

d) $h(t) = t^3$, $(2, 8)$

e) $f(x) = \sqrt{x}$, $(4, 2)$

f) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $(8, 3)$

2. Determine o coeficiente angular da curva no ponto indicado.

a) $y = \dfrac{1}{x-1}$, $x = 3$

b) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, $x = 0$

3. Determine as equações de todas as retas com coeficiente angular -1 que sejam tangentes à curva $y = 1/(x-1)$.

4. Determine uma equação da reta que tenha coeficiente angular $1/4$ e que seja tangente à curva $y = \sqrt{x}$.

A derivada como função

5. Nos exercícios $a)$ - $f)$, use a definição para calcular as derivadas das funções. Depois determine os valores das derivadas, conforme especificado.

a) $f(x) = 4 - x^2$, $f'(-3)$, $f'(0)$, $f'(1)$

b) $F(x) = (x-1)^2 + 1$, $F'(-1)$, $F'(0)$, $F'(2)$

c) $g(t) = \dfrac{1}{t^2}$, $g'(-1)$, $g'(2)$, $g'(\sqrt{3})$

d) $k(z) = \dfrac{1-z}{2z}$, $k'(-1)$, $k'(1)$, $k'(\sqrt{2})$

e) $p(\theta) = \sqrt{3\theta}$, $p'(1)$, $p'(3)$, $p'(2/3)$

f) $r(s) = \sqrt{2s+1}$, $r'(0)$, $r'(1)$, $r'(1/2)$

6. Nos exercícios $a)$ - $f)$, determine as derivadas indicadas.

a) $\dfrac{dy}{dx}$ se $y = 2x^3$

b) $\dfrac{dr}{ds}$ se $r = s^3 - 2s^2 + 3$

c) $\dfrac{ds}{dt}$ se $s = \dfrac{t}{2t+1}$

d) $\dfrac{dv}{dt}$ se $v = t - \dfrac{1}{t}$

e) $\dfrac{dp}{dq}$ se $p = \dfrac{1}{\sqrt{q+1}}$

f) $\dfrac{dz}{dw}$ se $z = \dfrac{1}{\sqrt{3w-2}}$

7. Encontre a derivada da função usando a definição. Diga quais são os domínios da função e da derivada.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

b) $f(x) = mx + b$

c) $f(t) = 5t - 9t^2$

d) $f(x) = 1,5x^2 - x + 3,7$

e) $f(x) = x^3 - 3x + 5$

f) $f(x) = x + \sqrt{x}$

8. Faça um esboço cuidadoso de f e abaixo dele esboce o gráfico de f'. Você pode sugerir uma fórmula para $f'(x)$ a partir do seu gráfico?

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$

b) $f(x) = e^x$

c) $f(x) = \ln x$

9. a) Se $f(x) = x^4 + 2x$, encontre $f'(x)$.
b) Verifique se sua resposta na parte $a)$ foi razoável, comparando com os gráficos de f e f'.

Regras de derivação

10. Nos exercícios abaixo determine a primeira e segunda derivadas.

a) $y = -x^2 + 3$

b) $s = 5t^3 - 3t^5$

c) $y = \dfrac{4x^3}{3} - x + 2e^x$

d) $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{4}$

e) $r = \dfrac{1}{3s^2} - \dfrac{5}{2s}$

f) $r = \dfrac{12}{\theta} - \dfrac{4}{\theta^3} + \dfrac{1}{\theta^4}$

11. Determine as derivadas das funções.

a) $\dfrac{2x+5}{3x-2}$

b) $v = (1-t)(11+t^2)^{-1}$

c) $f(s) = \dfrac{\sqrt{s}-1}{\sqrt{s}+1}$

d) $u = \dfrac{5x+1}{2\sqrt{x}}$

e) $r = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)$

f) $r = e^{\theta}\left(\dfrac{1}{\theta^2} + \theta^{-\pi/2}\right)$

12. Suponha que u e v sejam funções de x deriváveis em $x = 0$ e que

$$u(0) = 5,\ u'(0) = -3,\ v(0) = -1,\ v'(0) = 2.$$

Determine os valores das derivadas a seguir em $x = 0$.

a) $\dfrac{d}{dx}(uv)$

b) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)$

c) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{v}{u}\right)$

d) $\dfrac{d}{dx}(7v - 2u)$

13. **Regra da derivada da recíproca**
a) A regra da derivada da recíproca diz que em qualquer ponto em que a função $v(x)$ seja derivável e diferente de zero,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}.$$

Mostre que a regra da derivada da recíproca é um caso especial da regra da derivada do quociente.
b) Mostre que a regra da recíproca com a regra da derivada do produto formam a regra da derivada do quociente.

14. **Generalizando a regra do produto**
A regra da derivada do produto fornece a fórmula

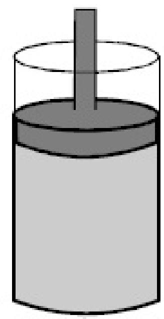
$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

para a derivada do produto uv de duas funções deriváveis de x.
a) Qual é a fórmula análoga para a derivada do produto uvw de três funções deriváveis de x?
b) Qual é a fórmula para a derivada do produto $u_1u_2u_3u_4$ de quatro funções deriváveis de x?
c) Qual é a fórmula para a derivada do produto $u_1u_2u_3...u_n$ de um número finito n de funções deriváveis de x?

15. **Pressão no cilindro**
Se um gás for mantido em um cilindro a temperatura constante T, a pressão P estará relacionada com o volume V de acordo com uma fórmula da forma

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

em que a, b, n e R são constantes. Determine dP/dV. (Veja a figura a seguir.)



Derivadas das funçõesm logarítmicas, exponenciais e trigonométricas

16. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = e^x$ no ponto de abscissa 0.

17. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \ln x$ no ponto de abscissa 1. Esboce os gráficos de f e da reta tangente.

18. Seja $f(x) = a^x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$ é um real dado. Mostre que $f'(x) = a^x \ln a$.

19. Calcule $f'(x)$.

a) $f(x) = 2^x$
b) $f(x) = 5^x$
c) $f(x) = \pi^x$
d) $f(x) = e^x$

20. Seja $g(x) = \log_a x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$ é constante. Mostre que $g'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$

21. Calcule $g'(x)$.

a) $g(x) = \log_3 x$
b) $g(x) = \log_5 x$
c) $g(x) = \log_\pi x$
d) $g(x) = \ln x$

22. Nos exercícios abaixo determine as derivadas de y em relação a x ou t conforme o caso.

a) $y = \ln 3x$
b) $y = \ln(t^{3/2})$
c) $y = \ln \dfrac{3}{x}$

23. Nos exercícios abaixo utilize derivação logarítmica para determinar a derivada de y em relação a variável independente dada.

a) $y = \dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{2}$
b) $y = \sqrt{\theta + 3sen\theta}$
c) $y = \dfrac{1}{t(t+1)(t+2)}$
d) $y = \dfrac{\theta sen\theta}{\sqrt{sec\theta}}$
e) $y = \sqrt{\dfrac{(x+1)^{10}}{(2x+1)^5}}$
f) $3\sqrt{\dfrac{x(x+1)(x-2)}{(x^2+1)(2x+3)}}$

24. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$ no ponto de abscissa 0.

25. Calcule $f'(x)$ sendo

a) $f(x) = \operatorname{tg} x$

b) $f(x) = \sec x$

26. Seja $f(x) = \operatorname{cotg} x$. Calcule

a) $f'(x)$

b) $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

27. Use triângulos para determinar os ângulos nos seguintes itens.

a) $\operatorname{tg}^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$

b) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

c) $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

d) $\operatorname{cossec}^{-1}(2)$

e) $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

f) $\operatorname{cotg}^{-1}(-1)$

Derivabilidade e Continuidade

28. Seja $f(x) = \begin{cases} x+1 & se\ \ x < 2 \\ 1 & se\ \ x \geq 2. \end{cases}$

a) f é contínua em 2? Por quê?
b) f é derivável em 2? Por quê?

29. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 & se\ \ x \leq 0 \\ -x^2 & se\ \ x > 0. \end{cases}$

a) f é contínua em 0? Por quê?
b) f é derivável em 0? Por quê?

30. Seja $f(x) = \begin{cases} -x+3 & se\ \ x < 3 \\ x-3 & se\ \ x \geq 3. \end{cases}$

a) f é contínua em 3? Por quê?
b) f é derivável em 3? Por quê?

31. Esboce o gráfico de uma função que seja contínua exceto para a descontinuiade em -1 e 4, porém contínua à esquerda em -1 e à direita em 4.

32. A tarifa T cobrada para dirigir em um certo trecho de uma rodovia com pedágio é de \$5, exceto durante o horário de pico (entre 7 da manhã e 10 da manhã e entre 4 da tarde e 7 horas da noite), quando a tarifa é de \$7. a) Esboce um gráfico de T como função do tempo t, medido em horas após a meia noite.
b) Discuta as descontinuidades da função e seu significado para alguém que use a rodovia.

Regras de derivação

33. Determine f', f'' e f'''.

a) $f(x) = 4x^2 + 2x$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = 5x^2 - \dfrac{1}{x^3}$

d) $f(x) = 3x^3 - 6x + 1$

e) $f(x) = x|x|$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & se \ \ x \leq 1 \\ 5x - 1 & se \ \ x > 1 \end{cases}$

34. Esboce os gráficos de f', f'' e f'''.

a) $f(x) = x^2|x|$

b)$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & se \ \ x \leq 1 \\ 5x - 1 & se \ \ x > 1 \end{cases}$

35. Determine a derivada de orden n.

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x$

c) $f(x) = \cos x$

d) $f(x) = \ln x$

36. Suponha que $y = y(r)$ seja derivável até a 2ª ordem. Verifique que

$$\frac{d}{dr}\left[(r^2 + r)\frac{dy}{dr}\right] = (2r + 1)\frac{dy}{dr} + (r^2 + r)\frac{d^2y}{dr^2}.$$

37. Suponha que $x = x(t)$ seja derivável até a 2ª ordem. Verifique que

a) $\dfrac{d}{dt}\left(t^2\dfrac{dx}{dt}\right) = 2t\dfrac{dx}{dt} + t^2\dfrac{d^2x}{dt^2}$

b) $\dfrac{d}{dt}\left(x\dfrac{dx}{dt}\right) = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + x\dfrac{d^2x}{dt^2}$

Derivadas de ordem superior, Regra da Cadeia e Derivação Implícita

38. Determine a derivada.

a) $y = \operatorname{sen} 4x$

b) $y = \cos 5x$

c) $f(x) = e^{3x}$

d) $g(t) = \ln(2t + 1)$

e) $y = (\operatorname{sen} x + \cos x)^3$

f) $y = \cos e^x$

39. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e seja g dada por $g(x) = f(e^{2x})$. Supondo $f'(1) = 2$, calcule $g'(0)$.

40. Derive.

a) $y = xe^{3x}$

b) $y = e^x \cos(2x)$

c) $y = e^{-x} \operatorname{sen} x$

d) $y = e^{-2t} \cos 3t$

41. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja f dada por $f(x) = xg(x^2)$. Calcule $f'(1)$ supondo $g(1) = 4$ e $g'(1) = 2$.

42. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável até 2ª ordem e seja g dada por $g(x) = f(e^{2x})$. Verifique que

$$g''(x) = 4e^{2x}[f'(e^{2x}) + e^{2x}f''(e^{2x})].$$

43. Determine dy/dt.

a) $y = \operatorname{sen}^2(\pi t - 2)$
b) $y = e^{\cos^2(\pi t - 1)}$
c) $y = \left(1 + \operatorname{tg}^4(t/3)\right)^3$
d) $y = \sqrt{1 + \cos(t^2)}$
e) $y = \operatorname{tg}^2(\operatorname{sen}^3 t)$
f) $y = \sqrt{3t + \sqrt{2 + \sqrt{1 - t}}}$

44. Suponha que $f'(3) = -1$, $g'(2) = 5$, $g(2) = 3$ e $y = f(g(x))$. Qual o valor de y' quando $x = 2$?

45. Se $r = \operatorname{sen}(f(t))$, $f(0) = \pi/3$ e $f'(0) = 4$, então qual é o valor de dr/dt em $t = 0$?

46. Use derivação implícita para determinar dy/dx.

a) $x^2y + xy^2 = 6$
b) $x^3 - xy + y^3 = 1$
c) $(3xy + 7)^2 = 6y$
d) $x^3 = (2x - y)/(x + 3y)$
e) $x + \operatorname{tg}(xy) = 0$
f) $e^{2x} = \operatorname{sen}(x + 3y)$

47. Determine a equação da reta tangente à elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, no ponto (x_0, y_0), $y_0 \neq 0$.

Derivada como taxa de variação: Velocidade e Aceleração

48. Dê as posições $s = f(t)$ de um corpo que se desloca em um eixo, sendo s dado em metros e t em segundos.
I. Determine o deslocamento do corpo e a velocidade média para o intervalo dado.
II. Determine o módulo de velocidade e a aceleração do corpo nas extremidades do intervalo.
III. Quando, se de fato acontece, o corpo muda de direção durante o intervalo?

a) $s = t^2 - 3t + 2$, $0 \leq t \leq 2$
b) $s = 6t - t^2$, $0 \leq t \leq 6$
c) $s = -t^3 + 3t^2 - 3t$, $0 \leq t \leq 3$
d) $s = (t^4/4) - t^3 + t^2$, $0 \leq t \leq 3$

49. **Movimento de uma partícula.** No instante t, a posição de um corpo que se desloca ao longo do eixo s é $s = t^3 - 6t^2 + 9t$.
I. Determine a aceleração do corpo cada vez que a velocidade for nula.
II. Determine o módulo da velocidade do corpo cada vez que a aceleração for nula.
III. Determine a distância total percorrida pelo corpo de $t = 0$ a $t = 2$.

50. **Queda livre em Marte e Júpiter.** As equações para queda livre nas superfícies de Marte e Júpiter (sendo s dado em metros e t em segundos) são $s = 1,86t^2$ em Marte e $s = 11,44t^2$ em Júpiter. Quanto tempo uma pedra leva, a partir do repouso, para atingir a velocidade de $27,8$m/s (cerca de 100 km/h) em cada planeta?

Linearização, Diferenciais e Polinômio de Taylor

51. Determine a linearização $L(x)$ de $f(x)$ em $x = a$.

a) $f(x) = x^3 - 2x + 3$, $a = 2$
b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$, $a = -4$
c) $f(x) = x + 1/x$, $a = 1$
d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = -8$
e) $f(x) = tg(x)$, $a = \pi$
f) $f(x) = e^x$, $a = 0$

52. Determine a linearização em um inteiro escolhido convenientemente próximo a x_0 em que a função dada e sua derivada sejam fáceis de calcular.

a) $f(x) = x^2 + 2x$, $x_0 = 0,1$
b) $f(x) = x^{-1}$, $x_0 = 0,9$
c) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$, $x_0 = -0.9$
d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8,5$
e) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = -0.1$
f) $f(x) = sen^{-1}x$, $x_0 = \pi/2$

53. Mostre que a linearização de $f(x) = (1+x)^k$ em $x = 0$ é $L(x) = 1 + kx$.

54. Cada função $f(x)$ varia quando x varia de x_0 para $x_0 + dx$.
Determine
I. a variação $\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$.
II. o valor da estimativa $df = f'(x_0)dx$.
III. o erro de aproximação $|\Delta f - df|$.

a) $f(x) = x^2 + 2x$, $x_0 = 1$, $dx = 0,1$

b) $f(x) = x^3 - x$, $x_0 = 1$, $dx = 0,1$

c) $f(x) = x^{-1}$, $x_0 = 0,5$, $dx = 0,1$

d) $f(x) = x^3 - 2x + 3$, $x_0 = 2$, $dx = 0,1$

55. Escreva uma fórmula diferencial que permita estimar a variação dada do volume ou da área da superfície nos casos abaixo.
a) A variação no volume $V = (4/3)\pi r^3$ de uma esfera quando o raio varia de r_0 para $r_0 + dr$.
b) A variação na área da superfície lateral $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ de um cone circular reto quando o raio varia de r_0 a $r_0 + dr$ e a altura permanece a mesma.

56. Calcule o polinômio de Taylor de ordem 1 da função dada, em volta de x_0 dado.

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x_0 = 0$

c) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

57. Calcule um valor aproximado e avalie o erro.

a) $\sqrt{4,001}$

b) $\cos(0,02)$

c) $\ln(0,99)$

58. Determine o polinômio de Taylor, de ordem 2, de f em volta de x_0 dado.

a) $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$

b) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

c) $f(x) = 1/(1-x^2)$, $x_0 = 0$

d) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$

59. Utilizando polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro.

a) $\ln 1,3$

b) $\sqrt{4,1}$

c) $e^{0,03}$

d) $\cos 0,2$

Referências bibliográficas

[G] L. H. GUIDORIZZI, **Um curso de cálculo**, v.1, LTC, 5 ed, 2001.

[S] J. STEWART, **Cálculo**, v.1, Cengage Learning, 7 ed, 2013.

[T] G. B. THOMAS, **Cálculo**, v.1, Pearson, 12 ed, 2006.