Valores Extremos de uma função

1. Encontre os números críticos da função.

a) $f(x) = 5x^2 + 4x$

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$

c) $g(y) = \dfrac{y-1}{y^2 - y + 1}$

d) $F(x) = x^{4/5}(x-4)^2$

e) $g(\theta) = 4\theta - \operatorname{tg}\theta$

f) $f(x) = x^{-2}\ln x$

2. Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de f no intervalo dado.

a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$, $[0, 3]$

b) $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $[0, 3]$

c) $f(x) = (x^2 - 1)^3$, $[-1, 2]$

d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $[0{,}2; 4]$

e) $f(t) = t\sqrt{4 - t^2}$, $[-1, 2]$

f) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, $[-1, 1]$

3. Mostre que 5 é um número crítico da função

$$g(x) = 2 + (x-5)^3$$

mas g não tem um valor extremo local em 5.

4. Se f tem um valor mínimo local em c, mostre que a função $g(x) = -f(x)$ tem um valor máximo em c.

5. Esboce o gráfico de cada função e determine se a função tem quaisquer valores extremos absolutos no domínio.

a) $f(x) = |x|$, $-1 < x < 2$

b) $y = 3\operatorname{sen} x$, $0 < x < 2\pi$

c) $g(x) = \begin{cases} -x & se\ \ 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & se\ \ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

6. Seja $f(x) = (x-2)^{2/3}$.
a) $f'(2)$ existe?
b) Demonstre que o único valor extremo local de f ocorre em $x = 2$.
c) O resultado do item (b) contradiz o teorema do valor extremo?
d) Repita os itens (a) e (b) para $f(x) = (x-a)^{2/3}$, substituindo 2 por a.

7. Seja $f(x) = |x^3 - 9x|$.
a) $f'(0)$ existe?
b) $f'(3)$ existe?
c) $f'(-3)$ existe?
d) Determine todos os extremos de f.

Teorema do Valor Médio

8. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento e esboce o gráfico (calcule para isto todos os limites necessários).

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

b) $y = x + \dfrac{1}{x^2}$

c) $2 - e^{-t}$

d) $f(x)e^{2x} - e^x$

e) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

f) $x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$

9. Prove que a equação $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ admite uma única raíz real. Determine um intervalo de amplitude 1 que contenha tal raíz.

10. Determine a, para que a equação $x^3 + 3x^2 - 9x + a = 0$ admita uma única raíz real.

11. Para que valores de a, m e b a função

$$f(x) = \begin{cases} 3 & , \quad x = 0 \\ -x^2 + 3x + a & , \quad 0 < x < 1 \\ mx + b & , \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

satisfaz a hipótese do teorema do valor médio no intervalo $[0, 2]$?

12. Seja $f(x) = 2 - |2x - 1|$. Mostre que não existe um valor c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

Teste da Derivada Primeira

13. Responda as seguintes questões cujas derivadas são dadas nos exercícios $a)$ - $f)$
a) Quais são os pontos críticos de f?
b) Em quais intervalos f é crescente ou decrescente?
c) Em quais pontos, se houver, f assume valores máximos e mínimos locais?

a) $f'(x) = x(x-1)$
c) $f'(x) = (x-1)e^{-x}$
e) $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$, $x \neq 0$
b) $f'(x) = (x-1)^2(x+2)$
d) $f'(x) = \dfrac{x^2(x-1)}{x+2}$, $x \neq 2$
f) $f'(x) = 3 - \dfrac{6}{\sqrt{x}}$, $x \neq 0$

14. Nos exercícios abaixo:
I) Identifique os valores extremos locais das funções nos domínios dados e informe onde eles ocorrem.
II) Quais dos valores extremos, se houver, é absoluto?
III) Fundamente suas conclusões com uma calculadora ou programa gráfico.

a) $f(x) = 2x - x^2$, $-\infty < x \leq 2$
b) $f(t) = t^3 - 3t^2$, $-\infty < x \leq 3$
c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$, $3 \leq x < \infty$

15. Discuta o comportamento de valor extremo da função $f(x) = x\,\mathrm{sen}(1/x)$, $x \neq 0$. Quantos pontos críticos ela possui? Onde estão localizados no eixo x? f tem um mínimo absoluto? Um máximo absoluto?

Concavidade e Pontos de Inflexão

16. Represente graficamente as equações dos exercícios abaixo, seguindo o procedimento de construção de gráficos. Inclua as coordenadas de quaisquer pontos extremos e absolutos locais e pontos de inflexão.

a) $y = x^2 - 4x + 3$
c) $y = x + \mathrm{sen}\, x$, $0 \leq x \leq 2\pi$
e) $y = \dfrac{5}{x^4 + 5}$
b) $y = -2x^3 + 6x^2 - 3$
d) $y = \sqrt{16 - x^2}$
f) $\sqrt{|x - 4|}$

17. Esboce o gráfico das funções racionais nos exercícios abaixo.

a) $y = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$
b) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$
c) $y = \dfrac{x - 1}{x^2(x - 2)}$

18. Suponhamos que a derivada da função $y = f(x)$ seja

$$y' = (x-1)^2(x-2).$$

Em que pontos, se houver, o gráfico de f apresenta um mínimo local, ou um ponto de inflexão? (Dica: desenhe o padrão de sinais de y'.)

19. Estude a função dada com relação à concavidade e pontos de inflexão.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ b) $f(x) = xe^{-2x}$ c) $g(x) = e^{-x} - e^{-2x}$

20. Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$. Prove que f admite um único ponto de inflexão.

Formas Indeterminadas e Regras de L'Hospital

21. Nos exercícios abaixo, usamos a Regra de L'Hospital para calcular o limite. Então, calcule o limite usando os métodos estudados anteriormente.

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{x^2-4}$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^2-3x}{7x^2+1}$ e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x}$ d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{4x^3-x-3}$ f) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2+3x}{x^3+x+1}$

22. Use a Regra de L'Hospital para determinar os limites abaixo.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4}$ d) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t^2}{t}$ g) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{3^{\operatorname{sen}\theta}-1}{\theta}$

b) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2-25}{x+5}$ e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{8x^2}{\cos x - 1}$ h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x2^x}{2^x-1}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^3-2x}{7x^3+3}$ f) $\lim\limits_{\theta \to \pi/2} \dfrac{2\theta-\pi}{\cos(2\pi-\theta)}$ i) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\log_2 x}$

23. Determine os limites.

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} x^{1/(1-x)}$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} (1+2x)^{1/(2\ln x)}$ e) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x+2}\right)^{1/x}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} (\ln x)^{1/x}$ d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ f) $\lim\limits_{x \to 0^+} x(\ln x)^2$

24. A regra de L'Hospital não ajuda com os limites dos exercícios seguintes. Tente, mas você entrará em um ciclo vicioso. Determine os limites de outra forma.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2^x-3^x}{3^x+4^x}$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{x^2}}{xe^x}$

25. Determine $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}\right)$.

Gráficos

26. Use o roteiro já estudado para esboçar os seguintes gráficos.

a) $y = x^3 + x$ d) $y = \dfrac{x}{x-1}$ g) $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

b) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$ e) $y = \dfrac{x^2}{x^2+9}$ h) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

c) $y = 2 - 15x + 9x^2 - x^3$ f) $y = 2\sqrt{x} - x$ i) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$

27. Faça o mesmo que foi feito no exercício anterior incluindo a determinação das assíntotas oblíquas.

a) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ b) $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$ c) $y = 1 + \frac{1}{2}x + e^{-x}$

28. Ache a equação da assíntota oblíqua. Não desenhe a curva.

a) $y = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ b) $y = \dfrac{2x^3+x^2+x+3}{x^2+2x}$

29. Mostre que a curva $y = x - \text{tg}^{-1}\,x$ tem duas assíntotas oblíquas: $y = x + \pi/2$ e $y = x - \pi/2$. Use esse fato para esboçar a curva.

30. Mostre que a curva $y = \sqrt{x^2+4x}$ tem duas assíntotas oblíquas: $y = x+2$ e $y = -x-2$. Use esse fato para esboçar a curva.

Otimização

31. Encontre dois números cuja diferença seja 100 e cujo produto seja mínimo.

32. Encontre dois números positivos cujo produto seja 100 e cuja soma seja mínima.

33. Qual é a distância vertical máxima entre a reta $y = x+2$ e a parábola $y = x^2$ para $-1 \leq x \leq 2$?

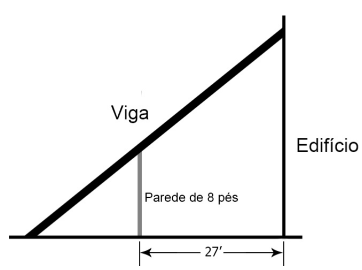
34. Um fazendeiro quer cercar uma área de $15000m^2$ em um campo retangular e então dividí-lo ao meio com uma cerca paralela a um dos lados do retângulo. Como fazer isso de forma que minimize o custo da cerca?

35. Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio r. Encontre o maior volume possível para este cilindro.

36. Demonstre que, entre todos os retângulos com perímetro de $8m$, o de maior área é o quadrado.

37. Você está planejando construir uma caixa retangular aberta com uma folha de papelão de 8×15 pol., recortando quadrados congruentes dos vértices das folhas e dobrando suas bordas para cima. Quais são as dimensões da caixa de maior volume que você pode fazer dessa maneira? Qual é o volume?

38. **Viga mais curta** O muro de 8 pés mostrado na figura a seguir está a 27 pés do edifício. Determine o comprimento da viga mais curta que alcançará o edifício, apoiado no solo do lado de fora do muro.



Método de Newton

39. Use o método de Newton para estimar as soluções da equação $x^2 + x - 1 = 0$. Comece com $x_0 = -1$ para a solução a esquerda e com $x_0 = 1$ para a solução à direta. Depois, determinar x_2 em cada caso.

40. Use o método de Newton para estimar a única solução real de $x^3 + 3x + 1 = 0$. Inicie com $x_0 = 0$ e depois calcule x_2.

41. Use o método de Newton para encontrar todas as raízes da equação $x^6 - x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 10 = 0$ com precisão de oito casas decimais. Comece fazendo um gráfico para encontrar a aproximação inicial.

Primitiva

42. Encontre a primitiva mais geral de cada uma das seguintes funções. (Verifique sua resposta derivando).

a) $f(x) = x - 3$

b) $f(x) = (x+1)(2x-1)$

c) $f(x) = x(2-x)^2$

d) $f(x) = e^2$

e) $f(x) = 1/5 - 2/x$

f) $g(t) = \dfrac{1+t+t^2}{\sqrt{t}}$

43. Encontre a primitiva F de f que satisfaça a condição dada. Verifique sua resposta comparando os gráficos de f e F.

a) $f(x) = 5x^4 - 2x^5$, $F(0) = 4$

b) $f(x) = 4 - 3(1+x^2)^{-1}$, $F(1) = 0$

44. Encontre f.

a) $f''(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x$

b) $f''(x) = \dfrac{2}{3}x^{2/3}$

c) $f'(x) = 1 + 3\sqrt{x}$, $f(4) = 25$

d) $f'(t) = t + 1/t^3$, $t > 0$, $f(1) = 6$

e) $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(-1) = 0$

f) $f'(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}}$, $f(\frac{1}{2}) = 1$

45. Determine a primitiva mentalmente de $f(x) = x^2 + 2^x$ e depois verifique diferenciando.

46. Resolva o problema de valor inicial. $\dfrac{dy}{dx} = 9x^2 - 4x + 5$, $y(-1) = 0$

Referências bibliográficas

[G] L. H. GUIDORIZZI, **Um curso de cálculo**, v.1, LTC, 5 ed, 2001.

[S] J. STEWART, **Cálculo**, v.1, Cengage Learning, 7 ed, 2013.

[T] G. B. THOMAS, **Cálculo**, v.1, Pearson, 12 ed, 2006.