LISTA 6

Integral

Áreas e Distâncias

1. a) Estime a área sob o gráfico $f(x) = \cos x$ de $x = 0$ até $x = \pi/2$ usando quatro retângulos aproximantes e extremidades direitas. Esboce o gráfico e os retângulos. Sua estimativa é uma subestimativa ou uma superestimativa?
b) Repita a parte a) usando extremidades esquerdas.

2. Use a definição de soma de Riemann para achar uma expressão para a área sob o gráfico de f como um limite. Não calcule o limite.

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, $1 \leq x \leq 3$ b) $f(x) = x^2 + \sqrt{1+2x}$, $4 \leq x \leq 7$ c) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$, $0 \leq x \leq \pi$

3. Use aproximações finitas para estimar a área sob a curva da função, usando
a) uma soma inferior com dois retângulos de largura igual.
b) uma soma inferior com quatro retângulos de largura igual.
c) uma soma superior com dois retângulos de largura igual.
d) uma soma superior com quatro retângulos de largura igual.

a) $f(x) = x^2$ entre $x = 0$ e $x = 1$ b) $f(x) = x^3$ entre $x = 0$ e $x = 1$

A Integral definida

4. Suponha que f e g sejam integráveis e que

$$\int_1^2 f(x)dx = -4, \qquad \int_1^5 f(x)dx = 6 \quad \text{e} \quad \int_1^5 g(x)dx = 8.$$

Use regras de integração para calcular as integrais abaixo.

a) $\displaystyle\int_2^2 g(x)dx$ b) $\displaystyle\int_1^5 [f(x) - g(x)]dx$ c) $\displaystyle\int_1^5 [4f(x) - g(x)]dx$

5. Calcule as integrais definidas.

a) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} x dx$ c) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} r dr$ e) $\displaystyle\int_a^{\sqrt{3a}} x dx$

b) $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \theta d\theta$ d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{7}} x^2 dx$ f) $\displaystyle\int_0^{3b} x^2 dx$

6. Use uma integral definida para determinar a área da região entre a curva dada e o eixo x no intervalo $[0, b]$.

a) $y = 3x^2$ b) $y = \pi x^2$ c) $y = \dfrac{x}{2} + 1$

7. **Integrais de funções não negativas** Use a desigualdade max-min para mostrar que, se f é integrável, então

$$f(x) \geq 0 \text{ em } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

8. **Integrais de funções não positivas** Mostre que, se f for integrável, então

$$f(x) \leq 0 \text{ em } [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq 0.$$

9. Que valores de a e b minimizam o valor de

$$\int_a^b (x^4 - 2x^2)dx?$$

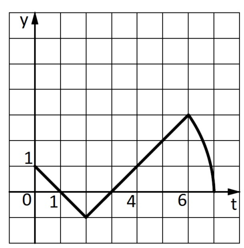
10. Use a desigualdade max-min e determine os limiter superior e inferior para o valor de

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2}dx.$$

<u>Teorema Fundamental do Cálculo</u>

11. Explique exatamente o significado da afirmação "*derivação e integração são processos inversos*".

12. Seja $g(x) = \int_0^x g(t)dt$, em que f é a função cujo gráfico é mostrado.
a) Calcule $g(x)$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ e 6.
b) Estime $g(7)$.
c) Onde g tem um valor máximo? Onde possui um valor mínimo?
d) Faça um esboço do gráfico de g.



13. Use o Teorema Fundamental do Cálculo para encontrar a derivada da função.

a) $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t^3+1}dt$ b) $g(s) = \int_5^s (t - t^2)^8 dt$ c) $g(r) = \int_0^r \sqrt{x^2+4}dx$

14. Calcule a integral.

a) $\int_{-1}^2 (x^3 - 2x)dx$ d) $\int_0^1 (3 + x\sqrt{x})dx$ g) $\int_0^3 (2\,\mathrm{sen}\,x - \mathrm{e}^x)dx$

b) $\int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9\right)du$ e) $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$ h) $\int_1^2 \frac{v^3+3v^6}{v^4}dv$

c) $\int_0^1 x^{4/5}dx$ f) $\int_1^2 (1+2y)^2 dy$ i) $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{8}{1+x^2}dx$

15. Encontre a derivada da função
a) $g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{u^2-1}{u^2+1}du$ $\left[Dica: \int_{2x}^{3x} f(u)du = \int_{2x}^0 f(u)du + \int_0^{3x} f(u)du\right]$

b) $g(x) = \int_{1-2x}^{1+2x} t\,\mathrm{sen}\,t dt$

16. Se $f(x) = \int_0^x (1-t^2)\, e^{t^2}\, dt$, em qual intervalo f é crescente?

Integrais indefinidas e a regra da substituição

17. Calcule as integrais indefinidas usando as substituições dadas para reduzir as integrais à forma padrão.

a) $\int 2(2x+4)^5 dx,\ u = 2x+4$

b) $\int 7\sqrt{7x-1} dx,\ u = 7x-1$

c) $\int 2x(x^2+5)^{-4} dx,\ u = x^2+5$

d) $\int \frac{4x^3}{(x^4+1)^2} dx,\ u = x^4+1$

e) $\int (3x+2)(3x^2+4x)^4 dx,\ u = 3x^2+4x$

f) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^{1/3}}{\sqrt{x}} dx,\ u = 1+\sqrt{x}$

g) $\int \operatorname{sen} 3x dx,\ u = 3x$

h) $\int x \operatorname{sen}(2x^2) dx,\ u = 2x^2$

i) $\int \sec 2t \operatorname{tg} 2t dt,\ u = 2t$

j) $\int (1-\cos(t/2))^2 \operatorname{sen}(t/2) dt,\ u = 1-\cos(t/2)$

18. Calcule as integrais.

a) $\int \sqrt{3-2s} ds$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{5s+4}} ds$

c) $\int 3y\sqrt{7-3y^2} dy$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} dx$

e) $\int \frac{\operatorname{sen}(2t+1)}{\cos^2(2t+1)} dt$

f) $\int \frac{1}{t^2} \cos\left(\frac{1}{t}-1\right) dt$

g) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}} dx$

h) $\int \sqrt{\frac{x^3-3}{x^{11}}} dx$

i) $\int \frac{dx}{x \ln x}$

j) $\int (x+1)^2(1-x)^5 dx$

k) $\int \frac{x}{(x^2-4)^3} dx$

l) $\int \frac{\ln\sqrt{t}}{t} dt$

19. Verifique, por derivação que a fórmula está correta.

a) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \sqrt{x^2+1} = C$

b) $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C$

Área entre curvas

20. Determine a área da região em forma de hélice compreendida entre a curva $x - y^3 = 0$ e a reta $x - y = 0$.

21. Determine a área da região, no primeiro quadrante, delimitada pelas retas $y = x$ e $x = 2$, a curva $y = 1/x^2$ e o eixo x.

22. Determine a área da região triangular no primeiro quadrante, limitada à esquerda pelo eixo y e à direita pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$.

23. Desenhe o conjunto A dado e calcule a área.
a) A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 1$, $x = 3$, pelo eixo $0x$ e pelo gráfico de $y = x^3$.
b) A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = \sqrt{x}$.
c) A é o conjunto de todos (x, y) tais que $x^2 - 1 \leq y \leq 0$

Referências bibliográficas

[G] L. H. GUIDORIZZI, **Um curso de cálculo**, v.1, LTC, 5 ed, 2001.

[S] J. STEWART, **Cálculo**, v.1, Cengage Learning, 7 ed, 2013.

[T] G. B. THOMAS, **Cálculo**, v.1, Pearson, 12 ed, 2006.