LISTA 7

Técnicas de Integração

Primitivas Imediatas

1. Calule e verifique sua resposta por derivação.

a) $\int 3dx$ c) $\int \sqrt[5]{x^2}dx$ e) $\int \left(e^{4x} + \dfrac{1}{x^2}\right) dx$ g) $\int (e^x + 4)dx$

b) $\int xdx$ d) $\int x^{-4}dx$ f) $\int \dfrac{x+1}{x}dx$ h) $\int e^{\sqrt{2x}}\, dx$

2. a) Verifique que $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$.

b) Calcule $\int \operatorname{sen}^2 x dx$.

3. Calcule

a) $\int \cos^2 2xdx$ c) $\int \operatorname{sen}^2 3xdx$

b) $\int \cos^2 5xdx$ d) $\int (\operatorname{sen} x - \cos x)^2 dx$

4. Determine α e β de modo que

a) $\operatorname{sen} 6x \cos x = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen} \alpha x + \operatorname{sen} \beta x)$, Sugestão: $\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)]$

b) $\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x = -\frac{1}{2}(\cos \alpha x - \cos \beta x)$, Sugestão: $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

5. Calcule.

a) $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3xdx$ c) $\int \cos 5x \cos xdx$

b) $\int \operatorname{sen} 3x \cos 2xdx$ d) $\int \cos 7x \cos 3xdx$

Técnica para o cálculo de integral do tipo $\int f(g(x))g'(x)dx$

6. Calcule.

a) $\int (3x-2)^3 dx$ c) $\int x^2 e^{x^3}\, dx$ e) $\int \cos^3 x \operatorname{sen} xdx$ g) $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx$

b) $\int x \operatorname{sen} x^2 dx$ d) $\int \operatorname{sen} 5xdx$ f) $\int \operatorname{sen}^5 x \cos xdx$ h) $\int x\sqrt{1+3x^2}dx$

7. Calcule.

a) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos xdx$ c) $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 xdx$

b) $\int \cos^3 x \operatorname{sen}^3 xdx$ d) $\int \operatorname{tg} x \sec^3 xdx$

8. Calcule.

a) $\displaystyle\int \frac{2}{x-3}dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{2x+3}dx$

c) $\displaystyle\int \left(x+\frac{3}{x-2}\right)dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}dx$

<u>Integração por Partes</u>

9. Calcule.

a) $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^x\,dx$

b) $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x dx$

c) $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{e}^x\,dx$

d) $\displaystyle\int x\ln x dx$

e) $\displaystyle\int x\sec^2 x dx$

f) $\displaystyle\int x(\ln x)^2 dx$

g) $\displaystyle\int x^3\,\mathrm{e}^{x^2}\,dx$

h) $\displaystyle\int x^3\cos x^2 dx$

10. Calcule.

a) $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,dx$

b) $\displaystyle\int_1^2 \ln x dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\cos x dx$

d) $\displaystyle\int_0^x t^2\,\mathrm{e}^{-st}\,dt,\ s\neq 0$

11. Encontre a área da região delimitada pelas curvas dadas.

a) $y = x^2\ln x,\ y = 4\ln x$

b) $y = x^2\,\mathrm{e}^{-x},\ y = x\,\mathrm{e}^{-x}$

12. Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável, usando o gráfico da função e de sua primitiva (tome constante $C = 0$).

a) $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^{-2x}\,dx$

b) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} 2x dx$

13. a) Use integração por partes para mostrar que

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$$

b) Se f e g forem funções inversas e f' for contínua, demonstre que

$$\int_a^b f(x)dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy$$

[Dica: Use a parte (a) e faça a substituição de $y = f(x)$.]

c) Use a parte (b) para calcular $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x dx$.

Mudança de Variável

14. Calcule.

a) $\int \sqrt{1-4x^2}dx$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

c) $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$

d) $\int \sqrt{-x^2+2x+2}dx$

15. Calcule a área do conjunto de todos (x, y) tais que $x^2 + 2y^2 \leq 3$ e $y \geq x^2$.

16. Calcule a área do conjunto de todos (x, y) tais que $x \geq \sqrt{1+y^2}$ e $2x + y \leq 2$.

17. Indique uma mudança de variável que elimine a raiz do integrando.

a) $\int \sqrt{9-x^2}dx$

b) $\int \sqrt{x^2+9}dx$

c) $\int \sqrt{x^2+3x+3}dx$

d) $\int \sqrt{1+e^x}dx$

e) $\int \sqrt{3-4x^2}dx$

f) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-3x^2}}dx$

g) $\int x\sqrt{x-1}dx$

h) $\int \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}dx$

Integrais de funções trigonométricas

18. Calcule a integral.

a) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x dx$

b) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta$

c) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(\theta/3) d\theta$

d) $\int \frac{\cos^5 \alpha}{\sqrt{\operatorname{sen} \alpha}} d\alpha$

e) $\int \cos^2 x \operatorname{sen} 2x dx$

f) $\int \operatorname{tg}^5 x \sec^3 x dx$

g) $\int \operatorname{sen} 8x \cos 5x dx$

h) $\int \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\sec^2 x} dx$

19. Encontre a área da região delimitada pelas curvas dadas.

a) $y = \operatorname{sen}^2 x,\ y = \cos^2 x,\ -\pi/4 \leq x \leq \pi/4$

b) $y = \operatorname{sen}^3 x,\ y = \cos^3 x,\ \pi/4 \leq x \leq 5\pi/4$

20. Calcule as integrais.

a) $\int \cos 2x dx$

b) $\int_0^{\pi} 3 \operatorname{sen} \frac{x}{3} dx$

c) $\int \cos^2 x dx$

d) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^7 y dy$

21. Calcule as integrais.

a) $\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} dx$

b) $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} dt$

c) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{1-\cos x}} dx$

d) $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sqrt{1-\operatorname{sen} 2x} dx$

Substituição trigonométrica

22. Calcule a integral.

a) $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}dx$

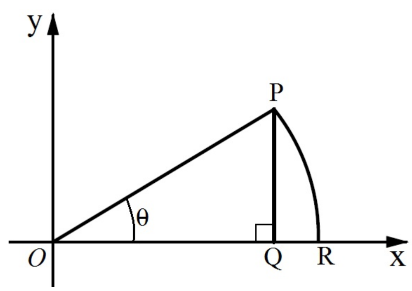
d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-7}}dx$

e) $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{5-u^2}}du$

f) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx$

23. Encontre a área da região delimitada pela hipérbole $9x^2-4y^2=36$ e a reta $x=3$.

24. Demonstre a fórmula $A=\frac{1}{2}r^2\theta$ para a área de um setor circular com raio r e ângulo e ângulo central θ. [Dica: suponha que $0<\theta<\pi/2$ e coloque o centro do círculo na origem, assim ele terá a equação $x^2+y^2=r^2$. Então A é a soma da área do triângulo POQ e a área da região PQR na figura.]



25. Calcule as integrais.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}dx$

b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{4+x^2}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx, \quad x>1$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}}dx$

26. Nos seguintes exercícios utilize uma substituição apropriada e, em seguida, uma substituição trigonométrica para calcular as integrais.

a) $\displaystyle\int_0^{\ln 4} \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t}+9}}dt$

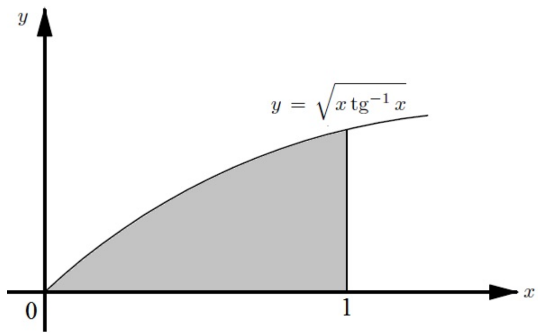
b) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}dx$

d) $\displaystyle\int \sqrt{x}\sqrt{1-x}dx$

27. Calcule $\int x^3\sqrt{1-x^2}dx$ usando
a) integração por partes.
b) substituição por u.
c) substituição trigonométrica.

28. Considere a região delimitada pelos gráficos de $y = \sqrt{x \operatorname{tg}^{-1} x}$ e $y = 0$ para $0 \leq x \leq 1$. Determine o volume do sólido formado pela rotação dessa região em torno do eixo das abscissas (veja a figura a seguir).



29. **Volume** Determine o volume gerado pela rotação de um arco da curva $y = \operatorname{sen} x$ em torno do eixo das abscissas.

30. **Área** Determine a área entre o eixo das abscissas e a curva $\sqrt{1 + \cos 4x}$, $0 \leq x \leq \pi$.

<u>Integração de funções racionais por frações parciais</u>

31. Escreva as formas de decomposição em frações parciais da função.

a) $\dfrac{1+6x}{(4x-3)(2x+5)}$

b) $\dfrac{x^2}{x^2+x+2}$

c) $\dfrac{1}{(x^2+9)^2}$

d) $\dfrac{x^4}{(x^2-x+1)(x^2+2)^2}$

32. Calcule a integral.

a) $\displaystyle\int \frac{x}{x-6}dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)}dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-4}{x^2+5x+6}dx$

d) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3+2x^2}dx$

e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)}dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}dx$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}dx$

h) $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+16}{(2x+1)(x-2)^2}dx$

i) $\displaystyle\int \frac{1}{s^2(s-1)^2}ds$

j) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$

k) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x(x^2+4)^2}dx$

l) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+7}{(x^2-4x+6)^2}dx$

33. Faça uma substituição para expressar o integrando como uma função racional e então calcule a integral.

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$

e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}dx$

f) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^{x}+2}dx$

g) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x - 3\cos x}dx$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}dx$

i) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 t}{\operatorname{tg}^2 t + 3\operatorname{tg} t + 2}dt$

34. Use integração por partes, juntamente com as técnicas desta seção, para calcular a integral.

a) $\displaystyle\int \ln(x^2 - x + 2)dx$ b) $\displaystyle\int x \operatorname{tg}^{-1} x dx$

35. Calcule a integral completando o quadrado.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 2x}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{4x^2 + 12x - 7}dx$

Sugestão: Use a fórmula $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

36. Encontre a área da região sob a curva dada de 1 até 2.

a) $y = \dfrac{1}{x^3 + x}$ b) $y = \dfrac{x^2+1}{3x - x^2}$

37. Se f for uma função quadrática tal que $f(0) = 1$ e

$$\int \frac{f(x)}{x^2(x+1)^3}dx$$

for uma função racional, encontre o valor de $f'(0)$.

Integrais impróprias

38. Explique por que cada uma das integrais é imprópria.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x-1}$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, \mathrm{e}^{-x^2} \, dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3}dx$ d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\pi/4} \operatorname{cotg} x dx$

39. Determine se cada integral é convergente ou divergente.

a) $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{(x-2)^{3/2}}dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}}dx$ c) $\displaystyle\int_2^{\infty} \mathrm{e}^{-5p} \, dp$

40. Esboçe a região e encontre a área (se a área for finita).

a) $S = \{(x, y); x \geq 1, 0 \leq y \leq e^{-x}\}$ b) $S = \{(x, y); x \geq 1, 0 \leq y \leq 1/(x^3 + x)\}$

41. Determine se a integral é convergente ou divergente usando o Teorema da Comparação.

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{x^3+1}dx$ b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4 - x}}dx$ c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2 + \mathrm{e}^{-x}}{x}dx$

Teorema da Comparação. Suponha que f e g sejam funções contínuas com $0 \leq g(x) \leq f(x)$ para $a \leq x$.

a) Se $\int_a^{\infty} f(x)dx$ é convergente, então $\int_a^{\infty} g(x)dx$ é convergente.

b) Se $\int_a^{\infty} g(x)dx$ é divergente, então $\int_a^{\infty} f(x)dx$ é divergente.

42. Encontre os valores de p para os quais a integral converge e calcule a integral para esses valores de p.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ b) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 x^p \ln x dx$

43. **Volume** Determine o volume gerado pela rotação de um arco da curva $y = \operatorname{sen} x$ em torno do eixo das abscissas.

44. **Área** Determine a área entre o eixo das abscissas e a curva $\sqrt{1+\cos 4x}$, $0 \leq x \leq \pi$.

Referências bibliográficas

[G] L. H. GUIDORIZZI, **Um curso de cálculo**, v.1, LTC, 5 ed, 2001.

[S] J. STEWART, **Cálculo**, v.1, Cengage Learning, 7 ed, 2013.

[T] G. B. THOMAS, **Cálculo**, v.1, Pearson, 12 ed, 2006.