UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas

IMECC - Instituto de Matemática e Estatística e Computação Científica

Prof^o Angelo Aliano

Disciplina MA111 - Cálculo 1

Nome: RA: Turma:

Pontuação obtida

Questão	1	2	3	4	$\sum$

Respostas não justificadas serão desconsideradas

GABARITO

1. (3,0 pontos) Calcule os limites seguintes, justificando detalhadamente cada passagem:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x-2}$.

Bastava decompor $(x^4 - 16) = (x-2)(x^3+4x+2x^2+8)$, e fazendo as simplicações, a indeterminação é eliminada. Com isto,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^3+4x+2x^2+8)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x^3+4x+2x^2+8) = 32.$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Multiplicando a expressão dada pelo conjugado do numerador, eliminamos a indeterminação, ou seja,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}} = 1.$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$, com a e b constantes $\in \mathbb{R}^*$.

Basta aplicar o limite fundamental $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ e multiplicar e dividir o limite dado por ax e bx para estabelecer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \dfrac{a}{b}$.

2. (3,0 pontos) Considere a funções f e g, de domínio real, definidas a seguir:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^x-1}{x}, & x<0 \\ \cos(x)+\alpha, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ cx+k, & 1 < x < 4 \\ -2x, & 4 \leq x. \end{cases}$$

(a) Seja $\alpha = 1$. Prove que $f(x)$ é descontínua em $x = 0$.

Nesta caso, os limites laterais são diferentes. Isto prova que $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe. De fato

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \ln(2) \quad (3^o \text{ limite fundamental!})$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2.$$

(b) Determine o valor de α de modo que $f(x)$ seja contínua $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \ln(2)$ então $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ln(2) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha = \ln(2) - 1$.

(c) Determine todos os valores das constantes $c, k \in \mathbb{R}$ tais que fazem g ser contínua $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Idem como no ítem anterior. Precisa-se ter

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) \Rightarrow c + k = 1$$

e

$$\lim_{x\to 4^-} g(x) = \lim_{x\to 4^+} g(x) \Rightarrow 4c + k = -8.$$

Resolvendo-se esta duas equações para c e k, obtemos $c = -3$ e $k = -4$.

3. (1,0 pontos) Porque a equação $x = \cos(x)$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$? Justifique sua resposta usando o Teorema do Valor Intermediário.
Defina $f(x) = x - \cos(x)$. É fácil ver que $f(0) = -1 < 0$ e $f(\pi/2) = \pi/2 > 0$. O Teorema do Valor Intermediário garante que existe pelo menos um c entre $(0, \pi/2)$ tal que $f(x)$ se anula, ou seja, que a equação dada têm solução neste intervalo.

4. (3,0 pontos) Seja a função

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow I \subseteq \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{2x+3}{4x-5}.$$

Pede-se:

(a) Determine o conjunto onde $f(x)$ é contínua. Justifique sua resposta.

Por ser uma função racional, $f(x)$ é contínua em seu domínio, ou seja, em $\mathbb{R} - \{\frac{5}{4}\}$.

(b) As equações para assíntotas horizontais e verticais.

Como

$$\lim_{x\to \frac{4}{5}^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

implica que $x = 4/5$ é uma assíntota vertical. Da mesma forma, como

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

implica que $y = 1/2$ é uma assíntota horizontal.

(c) Faça um esboço gráfico, determinando os pontos onde f intercepta os eixos coordenados.

Ora f(x) intercepta o eixo x no ponto $x = -3/2$ e o eixo y em $y = -3/5$. Usando estas informações e o ítem (b) temos o grafico de f exibido a seguir.

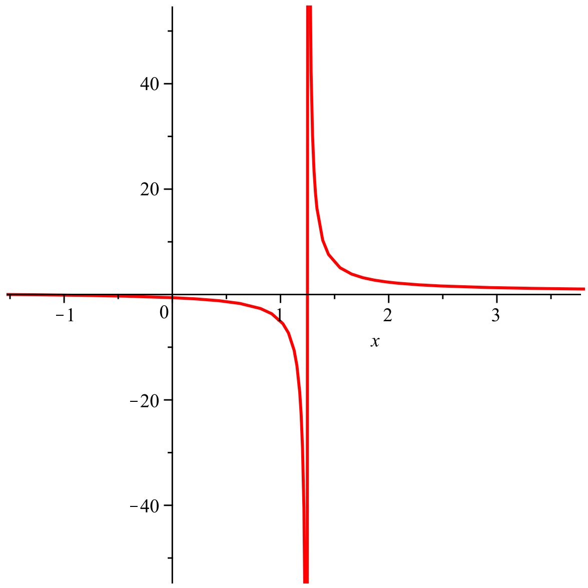

Figura 1: $f(x) = \dfrac{2x+3}{4x-5}$