UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas

IMECC - Instituto de Matemática e Estatística e Computação Científica

Disciplina: MA111 - Cálculo 1

Avaliação 3 - 30/11/2012

Prof^o Angelo Aliano

GABARITO

Nome: RA: Turma:

Pontuação obtida

Questão	1	2	3	4	$\sum$

Respostas não justificadas serão desconsideradas

1. (4,0 pontos) Calcule as integrais a seguir:

   (a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx;$

   Solução:

   Faça a substituição direta $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx \Rightarrow dx = 2\sqrt{x+1}du = 2du$. Logo, $x = u^2 - 1$. Se $x = 0 \Rightarrow u = 1$; se $x = 2 \Rightarrow u = \sqrt{3}$. Logo:

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{u}udu = 2\int_1^{\sqrt{3}} xdu = 2\int_1^{\sqrt{3}} u^2 - 1du = 2\left(\frac{u^3}{3} - u\right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}.$$

   (b) $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln(x))}{x}dx;$

   Solução:

   Faça a substituição direta $y = \ln(x) \Rightarrow dy = \frac{1}{x}dx \Rightarrow dx = xdy$. Logo:

$$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x}dx = \int \frac{\ln(y)}{x}xdu = \int \ln(y)dy$$

   e agora usamos integração por partes.

   Seja $u = \ln(y) \Rightarrow du = \frac{1}{y}dy$ e $dv = dy \Rightarrow v = y$. Daí,

$$\int \ln(y)dy = y\ln(y) - \int \frac{1}{y}ydy = y\ln(y) - y + C$$

   ou seja,

$$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x}dx = \ln(x)\ln(\ln(x)) - \ln(x) + C = \ln(x)[\ln(\ln(x)) - 1] + C.$$

   (c) $\displaystyle\int \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1+\sin^2(\theta)}}d\theta;$

Solução: Primeiramente seja $u = \sin(\theta) \Rightarrow du = \cos(\theta)d\theta$. Assim, a integral escritana variável u é:

$$\int \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1+\sin^2(\theta)}}d\theta = \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du.$$

Agora fazemos uma substituição trigonométrica. Seja $u = \tan(x) \Rightarrow du = \sec^2(x)dx$. Então:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = \int \frac{\sec^2(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}dx = \int \frac{\sec^2(x)}{\sqrt{\sec^2(x)}}dx = \int \sec(x)dx = \ln|\sec(x)+\tan(x)|+C$$

e como $\tan(x) = \sqrt{\sec^2(x)-1} = \sqrt{1+u^2}du$ e voltando à variável original θ, temos que

$$\int \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1+\sin^2(\theta)}}d\theta = \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = \ln|u+\sqrt{1+u^2}|+C = \ln|\sin(\theta)+\sqrt{1+\sin^2(\theta)}|+C.$$

(d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{x^3+x^2}dx.$

Solução: Decompondo o denominador em $x^2(x+1)$ podemos escrever a fração parcial com as contantes A, B e C a serem determinadas:

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x^3+x^2} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1} \\
&= \frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)} \\
&= \frac{(A+C)x^2+(A+B)x+B}{x^2(x+1)}
\end{aligned}$$

e isto implica no seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} A+C &= 0 \\ A+B &= 1 \\ B &= -1 \end{cases}$$

e temos $A = 2$, $B = -1$ e $C = -2$. Sendo assim voltamos à integral original:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{x-1}{x^3+x^2}dx &= \int_1^2 \frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x+1}dx \\
&= 2\int_1^2 \frac{1}{x}dx - \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx - 2\int_1^2 \frac{1}{x+1}dx \\
&= \left[2\ln(x)+\frac{1}{x}-2\ln(x+1)\right]\Bigg|_0^2 = \\
&= \left[2\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{1}{x}\right]\Bigg|_1^2 \\
&= 2\ln\left(\frac{4}{3}\right)-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2. (2,0 pontos) Considere a região R limitada acima do eixo x e compreendida entre $f(x) = 5-x^2$ e $g(x) = \frac{4}{x^2}$. Qual é a área de R?

Solução: A região de integração é a seguinte: e precisamos encontrar os extremos de integração.

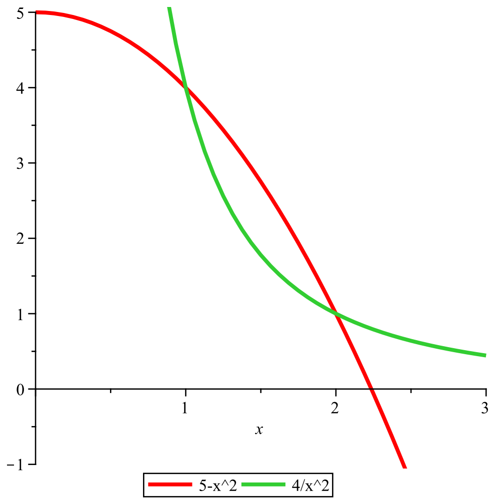

Figura 1: $g(x) = \dfrac{4}{x^2}$ e $f(x) = 5 - x^2$

Para tal, devemos resolver a equação

$$\frac{4}{x^2} = 5 - x^2 \Leftrightarrow -x^4 + 5x^2 - 4 = 0$$

e tomando-se $y = x^2$ a equação biquadrada em y tem a seguinte solução: $y_1 = 1$ e $y_2 = 4$. Daí, como estamos interessados em intersecções positivasm obtemos que $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Assim a área A pedia é calculada por

$$A = \int_1^2 (5 - x^2) - \left(\frac{4}{x^2}\right) dx = \left[5x - \frac{x^3}{3} - 4\frac{1}{x}\right]\Big|_1^2 = \frac{21}{3}.$$

3. (4,0 pontos) Considere a função $f(x) = \sin(3x)$ e a região $R : \{(x, y) |\, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3},\, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Determine o volume do sólido de revolução obtido, quando rotacionamos R em torno:

   (a) do eixo x;

   (b) do eixo y.

Solução de (a) a região que gerará o sólido está exibida abaixo: Como vamos rotacionar em tornod

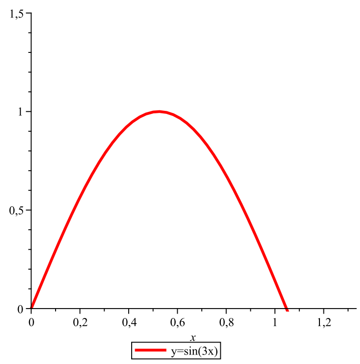

Figura 2: $f(s) = \sin(3x)$

e x, então o volume é computado resolvendo-se a integral a seguir. Deve-se ter em mente a fómula da bissecção de arcos $\sin(u) = \frac{1-\cos(2u)}{2}$.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi/3} \sin^2(3x)dx \\ &= \pi \int_0^{\pi/3} \frac{1-\cos(6x)}{2}dx \\ &= \pi \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} 1 - \cos(6x)dx \\ &= \pi \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin(6x)}{6} \right] \Big|_0^{\pi/3} \\ &= \pi \frac{\pi}{6} = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Solução (b): Como vamos rotacionar em torno de y usamos integração via cascas cilíndricas para calcular o volume do sólido obtido. A integral será resolvida via frações parciais, sendo $u = x \Rightarrow du = dx$ e $dv = \sin(3x) \Rightarrow v = -\frac{\cos(3x)}{3}$.:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\pi/3} x \sin(3x)dx \\ &= 2\pi \left[-\frac{x}{3}\cos(3x) \right] \Big|_0^{\pi/3} + \int_0^{\pi/3} \frac{\cos(3x)}{3}dx \\ &= 2\pi \left[-\frac{x}{3}\cos(3x) \right] \Big|_0^{\pi/3} + \frac{1}{3}\int_0^{\pi/3} \cos(3x)dx \\ &= 2\pi \left[-\frac{x}{3}\cos(3x) \right] \Big|_0^{\pi/3} + \left[\frac{\sin(3x)}{9} \right] \Big|_0^{\pi/3} \\ &= 2\pi \frac{\pi}{9} = 2\frac{\pi^2}{9}. \end{aligned}$$

Boa sorte e um ótimo 2013!