Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp

MA111- Primeiro Semestre de 2019

Exame - 10/07/2019 (Manhã)

Nome: ______________________________

RA: ______________________________ **Turma** [ ]

Questões	Notas
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
Total	

- Desligue o celular.
- A prova contém cinco questões. Resolva cada questão em sua respectiva folha.
- Não retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.
- Não é permitido o uso de calculadoras.
- Respostas sem justificativas não serão consideradas.

Justifique suas respostas!

Questão 1. (2.0 pontos) Avalie os limites abaixo e encontre o correspondente valor, caso existam.

(a) (0.7) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 27}{x^2 - 9}$;

(b) (0.7) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$;

(c) (0.6) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3x}{x^2 - 1}$.

Solução: (a) Observe que numerador e denominador convergem a zero quando $x \to -3$; logo, trata-se de uma indeterminação do tipo "$\frac{0}{0}$". Portanto, aplicando a regra de L'Hospital, obtemos

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^3 + 27}{x^2 - 9} = \lim_{x \to -3} \frac{3x^2}{2x} = \lim_{x \to -3} \frac{3x}{2} = \frac{-9}{2}.$$

(b) Inicialmente note que para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ temos $x^2 > 0$ e $-1 \leq \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x^3}\right) \leq 1$. Logo,

$$-x^2 \leq x^2 \,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x^3}\right) \leq x^2, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Agora, como $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0 = \lim\limits_{x \to 0}(-x^2)$ podemos usar o Teorema do Confronto e concluir que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0.$$

(c) Quando $x \to 1^-$ o numerador converge a 3 e o denominador converge a 0 através de valores negativos, já que $x^2 - 1 < 0$ para todo $x < 1$ e suficientemente próximo de 1. Portanto,

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{3x}{x^2 - 1} = -\infty.$$

Questão 2. (1.5 ponto) Consire a função $f(x) = e^{x^2} \operatorname{sen}(2x + \pi)$.

(a) (1.0) Calcule f'.

(b) (0.5) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 0)$.

Solução: (a) Usando a regra do produto e a regra da cadeia obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{x^2})' \operatorname{sen}(2x + \pi) + e^{x^2} (\operatorname{sen}(2x + \pi))' \\ &= 2xe^{x^2} \operatorname{sen}(2x + \pi) + 2e^{x^2} \cos(2x + \pi) \end{aligned}$$

(b) A equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 0)$ é dada por $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$. Como $f(0) = 0$ e $f'(0) = -2$ concluímos que a equação da reta tangente é $y = -2x$.

Questão 3. (2.0 pontos) Seja $f(x) = x^3 - 12x + 3$.

(a) (0.7) Determine os intervalos de crescimento/decrescimento de f; e os seus pontos de máximo e mínimo local, se existirem.

(b) (0.6) Determine os intervalos onde f é côncava para cima/baixo e os seus pontos de inflexão, se existirem.

(c) (0.3) Caso existam, encontre as assíntotas horizontais e verticais de f.

(d) (0.4) Esboce o gráfico de f usando (pelo menos) as informações obtidas nos itens (a), (b) e (c).

Solução: (a) Para encontrar os intervalos de crescimento/decrescimento de f e seus pontos de máximo e mínimo local, precisamos analisar a derivada de f:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2).$$

É claro que no conjunto $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ temos que $f'(x) > 0$ e no intervalo $(-2, 2)$ temos que $f'(x) < 0$. Portanto, pelo Teste Crescente/Decrescente, a função f é crescente nos intervalos $(-\infty, -2)$ e $(2, +\infty)$ e decrescente em $(-2, 2)$.

Agora note que f é diferenciável em todos os pontos do seu domínio (que é o conjunto dos números reais). Assim, os pontos críticos de f são aqueles em que a derivada se anula. Como $f'(x) = 0$ se e somente se $x = -2$ ou $x = 2$, estes são seus únicos pontos críticos. Além disso, como $f''(2) = 12$ e $f''(-2) = -12$ segue, pelo Teste da derivada segunda, que $x = -2$ é ponto de máximo local e $x = 2$ é ponto de mínimo local. (Aqui também podemos usar o Teste da derivada Primeira).

(b) Para analisar a concavidade do gráfico de f vamos analisar a segunda derivada de f:

$$f''(x) = 6x.$$

Como $f''(x) > 0$ em $(0, +\infty)$ temos, pelo Teste de Concavidade, que nesse intervalo o gráfico de f é côncavo para cima. No intervalo $(-\infty, 0)$ temos que $f''(x) < 0$ e portanto, novamente pelo Teste de Concavidade, neste intervalo o gráfico de f é côncavo para baixo. Por fim, como em $x = 0$ há mudança de concavidade temos que este é um ponto de inflexão.

(c) Como f é um polinômio, e portanto contínua em $\mathbb{R}$, não há assíntota vertical. Para calcular as assíntotas horizontais precisamos verificar o limite de f no infinito:

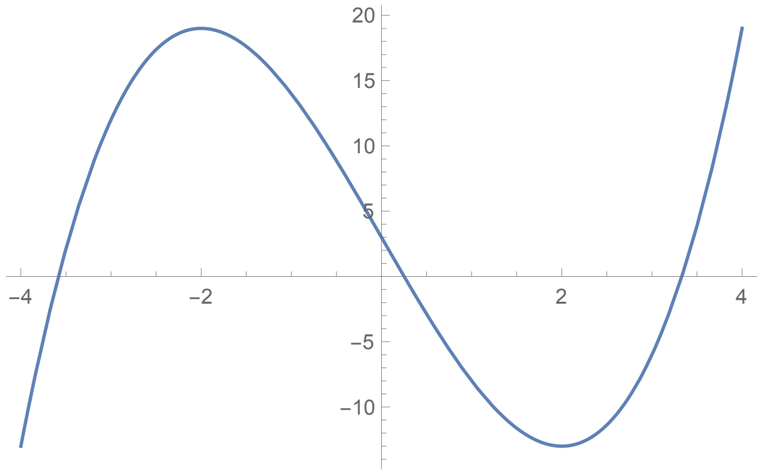
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 12x + 3) = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 12x + 3) = -\infty.$$

Portanto, f não tem assíntota horizontal.

(d)



Questão 4. (3.0 pontos) Calcule as seguintes integrais:

(a) (1.0) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{x^3} dx$;

(b) (1.0) $\displaystyle\int x^3 \ln x dx$;

(c) (1.0) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{(x+3)(x-5)} dx$.

Solução: (a) Inicialmente vamos resolver a integral indefinida $\int x^2 e^{x^3} dx$. Para isso, façamos a mudança de variáveis $u = x^3$, de modo que $du = 3x^2$ e

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int (3x^2) e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

Logo,

$$\int_0^1 x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}e^{x^3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e-1).$$

(b) Aqui vamos usar integração por partes. Para isso, sejam $u = \ln x$ e $dv = x^3 dx$, de modo que $du = 1/x dx$ e $v = x^4/4$. Logo,

$$\begin{aligned}\int x^3 \ln x dx &= \int u dv = uv - \int v du \\ &= \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^3}{4} dx \\ &= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C,\end{aligned}$$

onde C é uma constante arbitrária.

(c) Por frações parciais, temos que encontrar números reais A e B tais que

$$\frac{3x+1}{(x+3)(x-5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5},$$

ou equivalentemente, $(A+B)x - 5A + 3B = 3x + 1$. Daqui, segue que

$$\begin{cases} A + B = 3, \\ -5A + 3B = 1, \end{cases}$$

ou seja, $A = 1$ e $B = 2$. Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+1}{(x+3)(x-5)} dx &= \int \frac{1}{x+3} dx + 2\int \frac{1}{x-5} dx \\ &= \ln|x+3| + 2\ln|x-5| + C,\end{aligned}$$

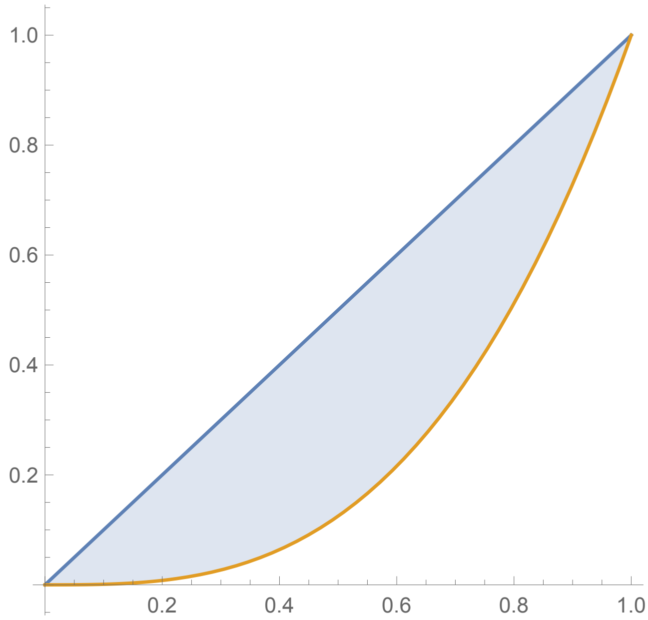
onde C é uma constante arbitrária.

Questão 5. (1.5 ponto) Considere as funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^3$, definidas no intervalo $[0, 1]$.

(a) (0.5) Esboce a região R limitada pelos gráficos de f e g.

(b) (1.0) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo x.

Solução: (a) Um esboço da região é dao abaixo



(b) Observe que a interseção do sólido com um plano perpendicular ao eixo x é um anel de raio externo x e raio interno x^3, cuja área é

$$A(x) = \pi x^2 - \pi x^6.$$

Logo, o volume do sólido é dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)dx \\ &= \pi \int_1^2 (x^2 - x^6)dx \\ &= \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7} \right) \Bigg|_0^1 \\ &= \frac{4\pi}{21}. \end{aligned}$$