Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp

MA111- Primeiro Semestre de 2019

Prova 1 - 11/04/2019 (5^a - Noturno)

Nome: GABARITO ______________________________

RA: ______________________________ Turma

Questões	Notas
Q1	1.5
Q2	2.5
Q3	1.5
Q4	2.5
Q5	2.0
Total	10.0

- Desligue o celular.
- A prova contém cinco questões. Resolva cada questão em sua respectiva folha.
- Não retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.
- Não é permitido o uso de calculadoras.
- Respostas sem justificativas não serão consideradas.

Justifique suas respostas!

Questão 1. (1.5 ponto) Resolva a desigualdade $|x|+|x-3|>4$. Encontre o conjunto solução e o ilustre sobre a reta real.

Solução:

Dividiremos a análise em três casos:

(i) $x \geq 3$

Nesse caso, $|x| = x$ e $|x-3| = x-3$ e a equação se torna

$$x + x - 3 > 4 \iff 2x > 7 \iff x > \frac{7}{2}.$$

Portanto, se $x \geq 3$ temos que todo $x \in \left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$ satisfaz a equação.

(ii) $0 \leq x < 3$

Nesse caso, $|x| = x$ e $|x-3| = -(x-3)$ e a equação se torna

$$x - (x-3) > 4 \iff 3 > 4$$

Portanto, se $0 \leq x < 3$ temos não existe x satisfazendo a equação.

(iii) $x < 0$

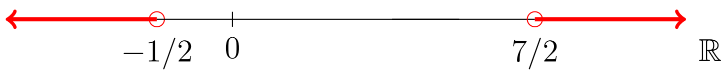
Nesse caso, $|x| = -x$ e $|x-3| = -(x-3)$ e a equação se torna

$$-x - (x-3) > 4 \iff -2x > 1 \iff x < -\frac{1}{2}.$$

Portanto, se $x < 0$ temos que todo $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ satisfaz a equação.

Assim, o conjunto solução é $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$.

A representação na reta real é dada abaixo



Questão 2. (2.5 pontos) Calcule os limites abaixo ou prove que não existe (sem usar a Regra de L'Hospital).

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3+2x^2-6}{8x^3+x+2}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^3+3}-\sqrt{3}}{x^3}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{5x+1}{2x-4}$.

Solução:
(a) Note que

$$\frac{4x^3+2x^2-6}{8x^3+x+2} = \frac{x^3\left(4+\dfrac{2}{x}-\frac{6}{x^3}\right)}{x^3\left(8+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)} = \frac{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{6}{x^3}}{8+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}}.$$

Como $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0$ para todo $p\in\mathbb{Q}$ temos que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(4+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^3}\right)=4 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(8+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)=8,$$

e, consequentemente,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3+2x^2-6}{8x^3+x+2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{6}{x^3}}{8+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

(b) Note que, "racionalizando",

$$\frac{\sqrt{x^3+3}-\sqrt{3}}{x^3} = \frac{\left(\sqrt{x^3+3}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x^3+3}+\sqrt{3}\right)}{x^3\left(\sqrt{x^3+3}+\sqrt{3}\right)} = \frac{x^3+3-3}{x^3\left(\sqrt{x^3+3}+\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^3+3}+\sqrt{3}}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^3+3}-\sqrt{3}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^3+3}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

(c) Notemos que, se $x>2$ temos $2x-4>0$ e portanto,

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{2x-4} = +\infty.$$

Além disso, temos que $\lim_{x\to 2^+}(5x+1) = 11 > 0$. Logo,

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{5x+1}{2x-4} = +\infty.$$

Questão 3. (1.5 ponto)

(a) Se existir, calcule,

$$\lim_{x\to 0^+} x^5 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

(b) Seja f uma função satisfazendo

$$-2\cos(\pi x) < f(x) < 1 + \frac{1}{x}, \qquad x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Determine $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

Solução:

(a) Como $\left|\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right| \leq 1$ temos

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \leq 1 \iff -x^5 \leq x^5\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \leq x^5, \quad \forall x > 0.$$

Além disso, de

$$\lim_{x\to 0^+} -x^5 = \lim_{x\to 0^+} x^5 = 0,$$

segue pelo teorema do confronto implica que

$$\lim_{x\to 0^+} x^5 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0.$$

(b) Sabendo que as funções $g(x) = -2\cos(\pi x)$ e $h(x) = 1 + \frac{1}{x}$ são contínuas em seus domínios, temos que

$$\lim_{x\to 1^-} -2\cos(\pi x) = -2\cos(\pi) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^-}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{1} = 2.$$

Pelo teorema do confronto, segue que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2.$$

Questão 4. (2.5 pontos) Determine, se possível, um valor para a constante k de forma que a função f seja contínua nos seguintes casos.

(a) $f(x) = \begin{cases} kx^2, & x \leq 2, \\ 2x + k, & x > 2. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^3}, & x < 0, \\ kx, & x \geq 0. \end{cases}$

Solução:
(a) Notemos que para todo $x \neq 2$ a função f é contínua qualquer que seja o valor de k, pois $f(x) = kx^2$ se $x < 2$ e $f(x) = 2x + k$ para $x > 2$. A continuidade de f é então garantida se tivermos que

$$f(2) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x).$$

Mas, pela definição, temos que

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} kx^2 = k2^2 = 4k = f(2)$$

e

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 2.2 + k = 4 + k.$$

Assim, f é contínua se e somente

$$4k = 4 + k \iff k = \frac{4}{3}.$$

(b) Como, para todo k,

$$0 = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} kx \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty,$$

segue que não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$. Portanto, não existe k que torne f contínua.

Questão 5. (2.0 pontos) Use o teorema do valor intermediário para mostrar que a equação

$$\sqrt[3]{x} = 1 - x$$

possui pelo menos uma solução real.

Solução: Considerando $f(x) = x + \sqrt[3]{x} - 1$ temos que

$$f(x) = 0 \iff \sqrt[3]{x} = 1 - x.$$

Agora, como f é contínua em seu domínio, segue que ela é contínua no intervalo fechado $[0, 1]$. Além disso, como $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$, o teorema do valor intermediário garante que existe $x \in (0, 1)$ satisfazendo $f(c) = 0$.