Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp
MA111- Primeiro Semestre de 2019
Prova 1 - 11/04/2019 (5^a - Tarde)

Nome: GABARITO ______________________________

RA: ______________________________ Turma

Questões	Notas
Q1	1.5
Q2	2.5
Q3	2.5
Q4	2.0
Q5	1.5
Total	10.0

- Desligue o celular.
- A prova contém cinco questões. Resolva cada questão em sua respectiva folha.
- Não retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.
- Não é permitido o uso de calculadoras.
- Respostas sem justificativas não serão consideradas.

Justifique suas respostas!

Questão 1. (1.5 ponto) Resolva a desigualdade $\left|\dfrac{x+2}{2x-3}\right| < 4$. Encontre o conjunto solução e o ilustre sobre a reta real.

Solução 1: A desigualdade do enunciado é equivalente a

$$-4 < \frac{x+2}{2x-3} < 4.$$

Note que:

- $\dfrac{x+2}{2x-3} < 4$ é equivalente a $\dfrac{7(x-2)}{2x-3} > 0$ e
- $-4 < \dfrac{x+2}{2x-3}$ é equivalente a $\dfrac{9x-10}{2x-3} > 0$.

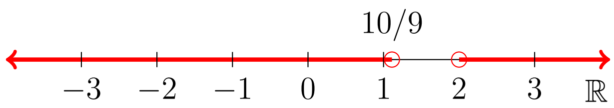
Estudo de quando $\dfrac{7(x-2)}{2x-3} > 0$:
Esta expressão é positiva se:

- $x-2 > 0$ e $2x-3 > 0 \Rightarrow x > 2$ ou
- $x-2 < 0$ e $2x-3 < 0 \Rightarrow x < 3/2$.

Estudo de quando $\dfrac{9x-10}{2x-3} > 0$:
Esta expressão é positiva se:

- $9x-10 > 0$ e $2x-3 > 0 \Rightarrow x > 3/2$ ou
- $9x-10 < 0$ e $2x-3 < 0 \Rightarrow x < 10/9$.

Portanto o conjunto solução é o conjunto $(-\infty, 10/9) \cup (2, +\infty)$.
A representação na reta real é dada abaixo



Solução 2: A desigualdade dada é equivalente a

$$-4 < \frac{x+2}{2x-3} < 4. \tag{1}$$

Vamos considerar dois casos.

Caso 1: $2x-3 > 0$, i.e., $x > 3/2$.
Aqui (1) é equivalente a $-4(2x-3) < x+2 < 4(2x-3)$ ou ainda $-8x+12 < x+2 < 8x-12$. Agora,

- $-8x+12 < x+2 \Rightarrow 9x > 10 \Rightarrow x > 10/9$;
- $x+2 < 8x-12 \Rightarrow 7x > 14 \Rightarrow x > 2$.

Portanto, neste caso devemos ter $x > 2$.

Caso 2: $2x - 3 < 0$, i.e., $x < 3/2$.

Neste caso, (1) é equivalente a $-4(2x-3) > x+2 > 4(2x-3)$, ou seja, $-8x+12 > x+2 > 8x - 12$. Agora,

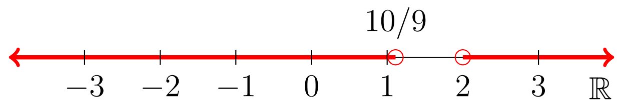
- $-8x + 12 > x + 2 \Rightarrow 9x < 10 \Rightarrow x < 10/9$;
- $x + 2 > 8x - 12 \Rightarrow 7x < 14 \Rightarrow x < 2$.

Portanto, aqui vemos que $x < 10/9$.

Olhando para os Casos 1 e 2 obtemos que o conjunto solução é o conjunto

$$(-\infty, 10/9) \cup (2, +\infty).$$

A representação na reta real é dada abaixo



Questão 2. (2.5 pontos) Calcule os limites abaixo ou prove que não existe (sem usar a Regra de L'Hospital).

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{3x+1}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}\right)$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left[\sqrt{x^3+x^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)\right]$.

Solução:
(a) Como estamos querendo o limite quando $x \to +\infty$, podemos assumir $x > 0$, dividir numerador e denominador por x e observar que

$$\frac{\sqrt{x^2+x}}{3x+1} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}}{3+\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}}{3+\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{3+\frac{1}{x}}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{3x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{3+\frac{1}{x}} = \frac{1}{3}.$$

(b) Como $x \to 0^-$, x se aproxima de 0 por valores menores do que 0, ou seja, $|x| = -x$. Portanto

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}\right) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x}$$

e daí

$$\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}\right) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{x} = -\infty.$$

(c) Apesar do argumento $\frac{\pi}{x}$, note que este limite é simples de ser calculado: é um caso de função limitada multiplicada por uma função cujo limite tende a zero.

De fato, é claro que para $x \neq 0$ temos

$$-1 \leq \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq 1. \tag{2}$$

Além disso, observando que $x^3+x^2 \geq 0$ para valores de x próximos de zero temos $\sqrt{x^3+x^2} \geq 0$. Logo, de (2) resulta que

$$-\sqrt{x^3+x^2} \leq \sqrt{x^3+x^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq \sqrt{x^3+x^2}.$$

Agora, como $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3+x^2} = 0$, pelo Teorema do Confronto (ou Sanduíche) que

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3+x^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0.$$

Questão 3. (2.5 pontos) Sejam a e b números reais e defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a\cos(\pi x), & x \leq -1, \\ 1 + e^x, & -1 < x < 1, \\ b\,\mathrm{sen}(\pi x), & x \geq 1, \end{cases}$$

(a) Existe a de forma que f seja contínua em $x = -1$? Se sim, determine-o.

(b) Existe b de forma que f seja contínua em $x = 1$? Se sim, determine-o.

Solução:
(a) Primeiramente observe que o domínio de f é o conjunto dos números reais. Calculando o valor de f em $x = -1$, obtemos

$$f(-1) = (-1)^2 + a\cos(-\pi) = 1 - a.$$

Vamos verificar se este valor pode ser igual ao valor do limite de f quando x tende a -1. Observe que

- $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \big(x^2 + a\cos(\pi x)\big) = 1 - a;$
- $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \big(1 + e^x\big) = 1 + e^{-1}.$

Portanto, a função $f(x)$ será contínua em $x = -1$ se $1 - a = 1 + e^{-1}$, ou seja, $a = -e^{-1}$.

(b) Observe que $f(1) = b\,\mathrm{sen}(\pi) = 0$. Vamos calcular os limites laterais:

- $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \big(1 + e^x\big) = 1 + e;$
- $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} b\,\mathrm{sen}(\pi x) = b\,\mathrm{sen}(\pi \cdot 1) = 0.$

Como $1 + e \neq 0$, o limite $\lim_{x\to 1} f(x)$ não existe e, portanto, f não é contínua em $x = 1$, não importando o valor de b.

Questão 4. (2.0 pontos) Use o teorema do valor intermediário para mostrar que a equação

$$x^6 - 5x^4 + 2x + 1 = 0.$$

possui pelo menos uma raiz positiva e outra negativa. **Sugestão:** Aplique o TVI em dois intervalos adequados.

Solução: Seja $f(x) = x^6 - 5x^4 + 2x + 1$. Esta função é contínua em toda a reta real; em particular ela é contínua em qualquer intervalo fechado. Observe que

- $f(-1) = -5$;
- $f(0) = 1$;
- $f(1) = -1$.

Como $f(-1) < 0$ e $f(0) > 0$, pelo Teorema do Valor Intermediário existe $\alpha \in (-1, 0)$ tal que $f(\alpha) = 0$, mostrando que a equação possui pelo menos uma raiz negativa.

Da mesma forma, como $f(0) > 0$ e $f(1) < 0$, novamente pelo Teorema do Valor Intermediário existe $\beta \in (0, 1)$ tal que $f(\beta) = 0$, mostrando que a equação também possui pelo menos uma raiz positiva.

Questão 5. (1.5 ponto) Determine, se existirem, as assíntotas horizontais e verticais da função

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + x + 2}{x^2 - x - 2}.$$

Solução: Para calcularmos as assíntotas horizontais, vamos calcular os limites de $f(x)$ quando $x \to \pm\infty$:

- $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 4x^2 + x + 2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancelto{x}{x^3}\left(1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = +\infty;$$

- $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 + 4x^2 + x + 2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancelto{x}{x^3}\left(1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = -\infty.$$

Como nenhum dos limites acima existe, não existem assíntotas horizontais.

Os candidatos a assíntotas verticais são os zeros do denominador, ou seja, $x = -1$ e $x = 2$. Note que nenhum destes valores é zero do numerador. Além disso,

- $$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x^3 + 4x^2 + x + 2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x\to-1^-} \frac{\cancelto{4}{x^3 + 4x^2 + x + 2}}{\cancelto{0^+}{(x+1)}\ \cancelto{-3}{(x-2)}} = +\infty;$$

- $$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{x^3 + 4x^2 + x + 2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x\to-1^+} \frac{\cancelto{4}{x^3 + 4x^2 + x + 2}}{\cancelto{0^-}{(x+1)}\ \cancelto{-3}{(x-2)}} = -\infty;$$

- $$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{x^3 + 4x^2 + x + 2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x\to2^-} \frac{\cancelto{28}{x^3 + 4x^2 + x + 2}}{\cancelto{3}{(x+1)}\ \cancelto{0^-}{(x-2)}} = -\infty;$$

- $$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} \frac{x^3 + 4x^2 + x + 2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x\to2^+} \frac{\cancelto{28}{x^3 + 4x^2 + x + 2}}{\cancelto{3}{(x+1)}\ \cancelto{0^+}{(x-2)}} = \infty.$$

Portanto, $x = -1$ e $x = 2$ são assíntotas verticais.