Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp
MA111- Primeiro Semestre de 2019
Prova 1 - 12/04/2019 (6^a - Manhã)

Nome: GABARITO ______________________________

RA: ______________________________ Turma

Questões	Notas
Q1	1.5
Q2	2.5
Q3	2.5
Q4	2.0
Q5	1.5
Total	10.0

- Desligue o celular.
- A prova contém cinco questões. Resolva cada questão em sua respectiva folha.
- Não retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.
- Não é permitido o uso de calculadoras.
- Respostas sem justificativas não serão consideradas.

Justifique suas respostas!

Questão 1. (1.5 ponto) Resolva a desigualdade $|6-3x| < |3x|$. Encontre o conjunto solução e ilustre ele sobre a reta real.

Solução: Vamos considerar dois casos.

Caso 1: $x \geq 0$.

Aqui a desigualdade dada equivale a $|6-3x| < 3x$, ou seja,

$$-3x < 6-3x < 3x.$$

Somando $3x$ em todos os membros desta desigualdade resulta

$$0 < 6 < 6x,$$

donde segue que devemos ter $x > 1$.

Caso 2: $x < 0$.

Neste caso, a desigualdade dada equivale a $|6-3x| < -3x$, ou seja,

$$-(-3x) < 6-3x < -3x.$$

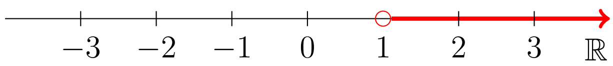
Somando $3x$ em todos os membros desta última desigualdade resulta que

$$6x < 6 < 0.$$

Como esta desigualdade nunca pode ocorrer, segue neste caso não existem valores de x de forma que a desigualdade seja satisfeita.

Olhando para os Casos 1 e 2 acima obtemos que o conjunto solução é o intervalo $(1, +\infty)$.

A representação na reta real é dada abaixo



Questão 2. (2.5 pontos) Calcule os limites abaixo ou prove que não existe (sem usar a Regra de L'Hospital).

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x+2}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{|x|}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left[x\,\mathrm{sen}^2(\ln x)\right]$.

Solução:
(a) Note que tanto o limite do numerador quanto o limite denominador são iguais a zero quando $x\to-2$. Portanto não é possível usar a regra do quociente para calcular o limite. Vamos então simplificar a expressão. Para todo $x\neq-2$ temos

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x+2} &= \frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x+2}\,\frac{\sqrt{x^2+12}+4}{\sqrt{x^2+12}+4}\\ &= \frac{x^2-4}{(x+2)(\sqrt{x^2+12}+4)}\\ &= \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(\sqrt{x^2+12}+4)}\\ &= \frac{x-2}{\sqrt{x^2+12}+4}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x+2} = \lim_{x\to-2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+12}+4} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}.$$

(b) Primeiro vamos analisar a função $f(x)=\frac{x}{|x|}$. Note que para $x>0$, $f(x)=1$, e para $x<0$, $f(x)=-1$. Portanto,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to0^+}1=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to0^-}(-1)=-1.$$

Como os limites laterais são distintos então $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{|x|}$ não existe.

(c) Note que $\lim_{x\to0^+}\mathrm{sen}^2(\ln x)$ não existe e portanto não podemos usar a regra do produto para calcular o limite. No entanto, a função $\mathrm{sen}^2(\ln x)$ é limitada, mais precisamente

$$0\le\mathrm{sen}^2(\ln x)\le1,\qquad x>0.$$

Assim, para todo $x>0$, temos que

$$0\le x\,\mathrm{sen}^2(\ln x)\le x,$$

e, pelo Teorema do Confronto, $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x\,\mathrm{sen}^2(\ln x)=0$.

Questão 3. (2.5 pontos) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e suponha que para todo $x \neq 0$ tenhamos

$$\cos(x) - 1 \leq f(x) \leq x^4 + x^2. \tag{1}$$

(a) Calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(b) Mostre que se f for contínua então $f(0) = 0$.

(c) Dê um exemplo de uma função contínua satisfazendo (1).

Solução:
(a) Sejam $g(x) = \cos(x) - 1$ e $h(x) = x^4 + x^2$. Portanto, de (1) temos que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), \qquad \text{para } \ x \neq 0.$$

Como

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \cos(x) - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0}(x^4 + x^2) = 0,$$

pelo Teorema do Confronto segue que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

(b) Supondo que f é uma função contínua, ela deve ser contínua em $x = 0$. Portanto devemos ter

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0).$$

Mas pelo item (a), concluímos que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e assim devemos ter $f(0) = 0$.

(c) Basta tomar, por exemplo, $f(x) = \cos(x) - 1$ ou $f(x) = x^4 + x^2$.

Questão 4. (2.0 pontos) Use o teorema do valor intermediário para mostrar que a equação

$$\sqrt{3x-2} = 5 - 2x - x^3.$$

possui pelo menos uma solução real.

Solução:

Defina $f(x) = \sqrt{3x-2} + 2x + x^3$ e note que a equação dada é equivalente a

$$f(x) = 5.$$

Note também que f é uma função contínua em seu domínio, ou seja, f é contínua no intervalo $(2/3, +\infty)$. A ideia é então aplicar o Teorema do Valor Intermediário. Para isso precisamos encontrar pontos a, b para os quais $f(a) < 5$ e $f(b) > 5$. Basta considerar, por exemplo, $a = 1$ e $b = 2$. De fato, sendo f é contínua para $x > 2/3$ ela também é contínua no intervalo fechado $[1, 2]$. Além disso, como $f(1) = 4 < 5 < 14 = f(2)$, o pelo T.V.I. implica que existe $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 5$. Logo, c é solução da equação $\sqrt{3x-2} = 5 - 2x - x^3$.

Questão 5. (1.5 ponto) Calcule as assíntotas horizontais e verticais da função

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x^2 - 1}.$$

Solução: Primeiro vamos determinar as assíntotas horizontais. Para isso devemos calcular $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Notemos que, para $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x^2 - 1} = \frac{1 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x^2}}.$$

Agora, lembrando que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0,$$

obtemos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x^2}} = 1$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x^2}} = 1.$$

Portanto a reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal.

Vamos agora determinar as assíntotas verticais. As candidatas são as retas $x = 1$ e $x = -1$, pois 1 e -1 não estão no domínio de f. Primeiramente, observe que quando $x \to 1^+$, o numerador em f tende para 7 enquanto que o denominador tende para 0 através de valores positivos. Logo,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty.$$

Logo $x = 1$ é uma assíntota vertical. Por outro lado, quando $x \to -1^+$, o numerador em f tende para -1 enquanto que o denominador tende para 0 através de valores negativos. Assim,

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$$

e $x = -1$ também é uma assíntota vertical.

Observação: Pode-se também verificar que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty.$$