Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp

MA111- Primeiro Semestre de 2019

Prova 1 - 12/04/2019 (6^a - Noturno)

Nome: GABARITO ______________________________

RA: ______________________________ Turma [ ]

Questões	Notas
Q1	1.5
Q2	2.5
Q3	1.5
Q4	2.5
Q5	2.0
Total	10.0

- Desligue o celular.
- A prova contém cinco questões. Resolva cada questão em sua respectiva folha.
- Não retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.
- Não é permitido o uso de calculadoras.
- Respostas sem justificativas não serão consideradas.

Justifique suas respostas!

Questão 1. (1.5) ponto Resolva a desigualdade $|x+1| + |x| \leq 2$. Encontre o conjunto solução e ilustre ele sobre a reta real.

Solução: Vamos dividir em três casos.

Caso 1: $x \geq 0$.

Neste caso temos $|x| = x$ e $|x+1| = x+1$. Portanto a desigualdade dada equivale a

$$x + 1 + x \leq 2,$$

ou seja, $x \leq 1/2$. Daqui segue que devemos ter $0 \leq x \leq 1/2$.

Caso 2: $-1 \leq x < 0$.

Aqui temos $|x| = -x$ e $|x+1| = x+1$. Logo, a desigualdade dada é equivalente a

$$x + 1 - x \leq 2.$$

Como esta desigualdade é sempre verdadeira, aqui devemos ter $-1 \leq x < 0$.

Caso 3: $x < -1$.

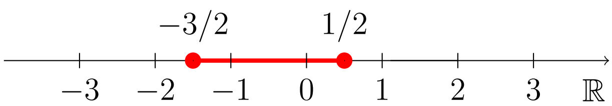
Neste caso temos $|x| = -x$ e $|x+1| = -(x+1)$ e a desigualdade dada equivale a

$$-(x+1) - x \leq 2,$$

ou seja, $x \geq -3/2$. Isso significa que aqui devemos ter $-3/2 \leq x < -1$.

Observando os três casos acima, vemos que o conjunto solução é o intervalo $[-3/2, 1/2]$.

A representação na reta real é dada abaixo



Questão 2. (2.5 pontos) Avalie os limites abaixo e encontre o correspondente valor caso exista, sem usar a regra de L'Hospital. **Justifique** suas respostas.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{3x-5}{x-1}\right)$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{8x^3-2x+1}{5x^3+3x^2-7}$.

Solução: (a) Observe que quando $x\to 1^-$ o denominado na expressão dada tende a zero pela esquerda (por valores negativos) enquanto que o numerador tende a -2. Logo,

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{3x-5}{x-1}\right)=\infty.$$

(b) Note que tanto numerador quanto denominador tendem a zero quando $x\to 3$. Assim não podemos usar a regra do quociente. A ideia é racionalizar. De fato, observe que

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} &= \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}\,\frac{\sqrt{x+6}+3}{\sqrt{x+6}+3}\\ &= \frac{x+6-9}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}\\ &= \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x+6}+3}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+6}+3}=\frac{1}{6}.$$

(c) Inicialmente, observe que se $x\neq 0$, podemos dividir numerador e denominador da expressão dada por x^3 e obter

$$\frac{8x^3-2x+1}{5x^3+3x^2-7}=\frac{8-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{5+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^3}}.$$

Lembrando que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=0,$$

obtemos

$$\lim_{x\to\infty}\left(8-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=8 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^3}\right)=5.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^3-2x+1}{5x^3+3x^2-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{8-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{5+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^3}}=\frac{8}{5}.$$

Questão 3. (1.5 pontos)

(a) Se existir, calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 \text{sen}\left(\dfrac{1}{x^8}\right)$.

(b) Seja f uma função satisfazendo

$$\frac{4x^2+6x}{2x^2+x+1} \leq f(x) \leq 2, \qquad \text{para } \ x \leq -10.$$

Calcule $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

Solução:

(a) Inicialmente observe que para $x \neq 0$,

$$-1 \leq \text{sen}\left(\frac{1}{x^8}\right) \leq 1. \tag{1}$$

Além disso, como estamos querendo calcular o limite quando $x \to 0^+$, devemos ter $x > 0$ e daí $x^3 > 0$. Multiplicando (1) por x^3, obtemos

$$-x^3 \leq x^3\text{sen}\left(\frac{1}{x^8}\right) \leq x^3, \qquad \text{se } \ x > 0.$$

Agora, como

$$\lim_{x\to 0^+} x^3 = \lim_{x\to 0^+}(-x^3) = 0,$$

segue do teorema do confronto que

$$\lim_{x\to 0^+} x^3\text{sen}\left(\frac{1}{x^8}\right) = 0.$$

(b) Notemos que para $x \leq -10$, podemos dividir numerador e denominador por x^2 e obter

$$\frac{4x^2+6x}{2x^2+x+1} = \frac{4+\dfrac{6}{x}}{2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}.$$

Lembrando que

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x^2} = 0,$$

obtemos

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^2+6x}{2x^2+x+1} = \lim_{x\to -\infty}\frac{4+\dfrac{6}{x}}{2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = 2.$$

Além disso, como $\lim\limits_{x\to -\infty} 2 = 2$ segue pelo teorema do confronto que

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2.$$

Questão 4. (2.5 pontos) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x-1}, & \text{se} \quad x \geq 2 \\[2ex] 4x - 7\,, & \text{se} \quad x < 2. \end{cases}$$

(a) A função f é contínua em $x = 2$? Justifique sua resposta.
(b) Encontre as assíntotas **horizontais** de f.
(c) Existe assíntota **vertical** em algum ponto?

Solução:
(a) Lembremos que a função f será contínua em $x = 2$ se $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$. Da definição de f temos que $f(2) = 1$. Por outro lado, para calcular o limite precisamos calcular os limites laterais, já que f tem expressões diferentes se $x > 2$ ou $x < 2$. Como

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x-1} = \frac{\sqrt{4-3}}{2-1} = 1,$$

e

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (4x-7) = 1,$$

segue que existe $\lim_{x\to 2} f(x)$ e vale $\lim_{x\to 2} f(x) = 1 = f(2)$. Logo, f é contínua em $x = 2$.

(b) Devemos calcular $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Primeiro notemos que se $x \geq 2$, podemos dividir numerador e denominador na expressão de f para obter

$$\frac{\sqrt{x^2-3}}{x-1} = \frac{\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x}}{\dfrac{x-1}{x}} = \frac{\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{x^2}}}{1-\dfrac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}}{1-\dfrac{1}{x}}.$$

Usando que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0,$$

obtemos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}}{1-\dfrac{1}{x}} = 1.$$

Logo, a reta $y = 1$ é uma assíntota de f.

Por outro lado, notando que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (4x-7) = -\infty,$$

segue que f não possui outra assíntota horizontal além de $y = 1$.

(c) Não. Para ver isso, note que f é uma função contínua em todos os pontos do seu domínio que é o conjunto dos números reais. Assim, dado qualquer número real a, temos

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a),$$

o que significa que f não possui assíntotas verticais.

Questão 5. (2.0 pontos) Use o teorema do valor intermediário (TVI) para mostrar que a equação

$$2\cos(x) = \text{sen}(x) + 1$$

tem uma solução no intervalo $(0, \frac{\pi}{3})$.

Solução: Defina a função f por

$$f(x) = 2\cos(x) - \text{sen}(x) - 1,$$

e note que a equação dada é equivalente a

$$f(x) = 0. \tag{2}$$

Portanto nosso problema é o de encontrar uma solução da equação (2) no intervalo $(0, \frac{\pi}{3})$. Para isso vamos aplica o TVI. Primeiramente note que f é uma função contínua no intervalo fechado $[0, \frac{\pi}{3}]$. Além disso, como

$$f(0) = 2 - 1 = 1 > 0 \qquad \text{e} \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2.\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0,$$

o TVI implica que existe $c \in (0, \frac{\pi}{3})$ tal que $f(c) = 0$, o que mostra o afirmado.