

Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp
MA111- Primeiro Semestre de 2019
Prova 2 - 23/05/2019 (5^a - Noturno)

Nome: **GABARITO** _____

RA: _____ Turma

Questões	Notas
Q1	2.0
Q2	2.0
Q3	1.5
Q4	3.0
Q5	1.5
Total	10.0

- Desligue o celular.
- A prova contém cinco questões. Resolva cada questão em sua respectiva folha.
- Não retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.
- Não é permitido o uso de calculadoras.
- Respostas sem justificativas não serão consideradas.

Justifique suas respostas!

Questão 1. (2.0 pontos) Calcule as derivadas das seguintes funções.

(a) $f(x) = x \ln x^2$;

(b) $g(x) = \frac{\cos(x^3)}{\sqrt{x}}$.

Solução: (a) Como $\ln x^2 = 2 \ln x$ temos pela regra do produto que

$$f'(x) = (x \ln x^2)' = (2x \ln x)' = 2 \ln x + 2x \frac{1}{x} = \ln x^2 + 2.$$

(b) Pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{d}{dx} \cos(x^3) = -3x^2 \operatorname{sen}(x^3).$$

Além disso,

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Logo, pela regra do quociente,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{\cos(x^3)}{\sqrt{x}} \right)' \\ &= \frac{(\cos(x^3))' \sqrt{x} - \cos(x^3) (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{-3x^2 \operatorname{sen}(x^3) \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(x^3)}{x} \\ &= -3x\sqrt{x} \operatorname{sen}(x^3) - \frac{1}{2x\sqrt{x}} \cos(x^3). \end{aligned}$$

Questão 2. (2.0 pontos) Uma certa quantidade de areia é despejada a uma taxa de $20 \text{ m}^3/\text{min}$, formando um monte cônico. Se a altura do monte for sempre o dobro do raio da base, com que taxa a altura estará crescendo quando o monte tiver 8 m de altura?

Solução: Se h denota a altura do monte, queremos encontrar $h'(t_0)$ onde t_0 é o tempo no qual $h(t_0) = 8$.

A relação entre o raio e a altura é dada por $h(t) = 2r(t)$. Assim, o volume do monte é dado por

$$V(t) = \frac{\pi r(t)^2 h(t)}{3} = \frac{\pi h(t)^3}{12}.$$

Derivando implicitamente, obtemos

$$V'(t) = \frac{\pi h(t)^2 h'(t)}{4}.$$

Avaliando em t_0 obtemos

$$20 = V'(t_0) = \frac{\pi 8^2 h'(t_0)}{4} \text{ implies } h'(t_0) = \frac{80}{64\pi} = \frac{5}{4\pi} \text{ m/min},$$

ou seja, a altura estará crescendo a uma taxa de $5/4\pi \text{ m/min}$.

Questão 3. (1.5 ponto) Avalie os limites abaixo e encontre o correspondente valor caso exista.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - e^x - e^{-x}}{2x^2};$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{x^2}.$

Solução: (a) Por continuidade

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2 \cos x - e^x - e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 = 0,$$

de forma que temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Além disso,

$$(2 \cos x - e^x - e^{-x})' = -2 \sin x - e^x + e^{-x} \quad \text{e} \quad (2x^2)' = 4x \neq 0 \text{ se } x \neq 0.$$

Pela regra de L'Hospital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - e^x - e^{-x}}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x - e^x + e^{-x}}{4x}$$

se o limite da direita da igualdade existir. Novamente por continuidade,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-2 \sin x - e^x + e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow 0} 4x = 0$$

e temos novamente uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Como

$$(-2 \sin x - e^x + e^{-x})' = -2 \cos x - e^x - e^{-x} \quad \text{e} \quad (4x)' = 4 \neq 0,$$

estamos novamente nas condições da regra de L'Hospital. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x - e^x + e^{-x}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x - e^x - e^{-x}}{4} = -1$$

e portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - e^x - e^{-x}}{2x^2} = -1.$$

(b) Como para x próximo e a direita de zero, $\sin x > 0$ temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(\sin x)^{x^2}} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(\sin x) \right\},$$

onde a última igualdade é válida pela continuidade da função exponencial, se o limite entre colchetes existe. Agora, como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(\sin x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}},$$

e sendo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty,$$

temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Observando que

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{x^2} \right)' = \frac{-2}{x^3} \neq 0$$

temos pela regra de L'Hospital que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} x^2 = 0,$$

e portanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{x^2} = e^0 = 1.$$

Questão 4. (3.0 pontos) Seja $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

- (a) (1.0) Determine os intervalos de crescimento/decrescimento de f , e os seus pontos de máximo e mínimo local, se existirem.
- (b) (0.8) Determine os intervalos onde f é côncava para cima/baixo e os seus pontos de inflexão, se existirem.
- (c) (0.4) Caso existam, encontre as assíntotas horizontais e verticais de f .
- (d) (0.8) Esboce o gráfico de f usando (pelo menos) as informações obtidas nos itens (a), (b) e (c).

Solução: (a) A análise de crescimento e decrescimento é feito via análise de sinal da primeira derivada. Derivando, obtemos

$$f'(x) = \frac{e^x}{x^2}(x - 1),$$

e portanto, o sinal de f' só depende de $(x - 1)$, uma vez que e^x e x^2 são sempre positivas. Assim,

$$f'(x) < 0 \quad \text{se } x < 1 \implies f \text{ é decrescente em } (-\infty, 1) \setminus \{0\}$$

e

$$f'(x) > 0 \quad \text{se } x > 1 \implies f \text{ é crescente em } (1, +\infty).$$

Além disso, como $x = 0$ não está no domínio de f , temos que $x = 1$ é o único ponto crítico de f . Como f' muda de negativo para positivo em $x = 1$ temos (pelo teste da primeira derivada) que $x = 1$ é um ponto de mínimo local de f .

(b) A análise da concavidade de f é feito via análise do sinal da segunda derivada de f . Derivando f' , obtemos

$$f''(x) = \frac{e^x}{x^3}(x^2 - 2x + 2).$$

Como $x^2 - 2x + 2$ possui discriminante positivo, é sempre positiva. Portanto, o sinal de f'' depende do sinal x^3 . Assim,

- em $(-\infty, 0)$ temos que x^3 é negativa e portanto $f''(x) < 0$;
- em $(0, +\infty)$ temos que x^3 é positiva e portanto $f''(x) > 0$.

Portanto, pelo Teste de Concavidade, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$ e côncava para cima em $(0, +\infty)$.

Ainda mais, como $x = 0$ não está no domínio de f , a função não possui ponto de inflexão de f .

(c) Como $x = 0$ não está no domínio de f , temos que é um candidato a assíntota vertical. Como,

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty,$$

temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{e^x}{x} = \pm\infty$$

e portanto $x = 0$ é uma assíntota vertical de f .

Para as assíntotas horizontais temos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0, \quad \text{pois} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

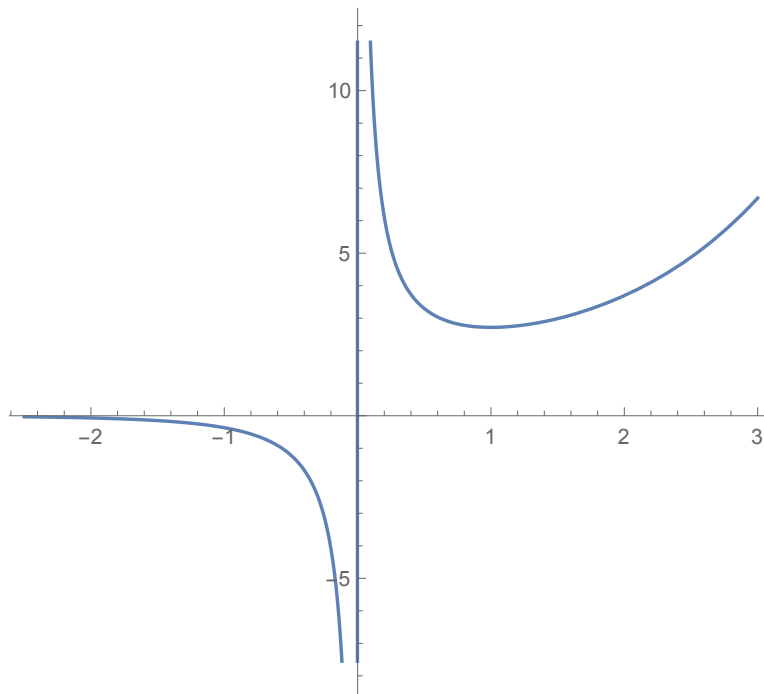
e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

por L'Hospital.

Portanto, $y = 0$ é assíntota horizontal de f para $x \rightarrow -\infty$.

(d) Um esboço do gráfico é dado abaixo



Questão 5. (1.5 ponto) Um fabricante de latas deseja fabricar uma lata na forma de um cilindro circular reto com um volume de $16\pi\text{cm}^3$. Determine o raio e a altura da lata para que um mínimo de material seja usado em sua fabricação.

Solução: Se h e r denotam, respectivamente, a altura e o raio da base da lata em questão, o material gasto na fabricação da lata é dado por

$$2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Como o volume de um cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$ temos que

$$16\pi = \pi r^2 h \implies h = \frac{16}{r^2}.$$

Assim, devemos minimizar a função

$$f(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{16}{r^2} = 2\pi r^2 + \frac{32\pi}{r}.$$

Note que o domínio de f é $(0, +\infty)$ o que implica que os únicos candidatos a mínimo de f são também pontos críticos de f . Derivando, obtemos

$$f'(r) = 4\pi r - \frac{32\pi}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 32\pi}{r^2} \text{ e } f'(r) = 0 \iff 4r^3 - 32 = 0 \iff r = 2.$$

Assim 2 é o único ponto crítico de f . Note que o sinal de f' muda de negativo para positivo em $r = 2$, o que implica, pelo Teste de Primeira Derivada, que $r = 2$ é um ponto de mínimo (absoluto) de f .

Agora observe que neste caso, $h = \frac{16}{2^2} = 4$, donde segue que o raio e a altura da lata devem ser 2 e 4, respectivamente.