Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp

MA111- Primeiro Semestre de 2019

Prova 2 - 23/05/2019 (5^a - Tarde)

Nome: GABARITO ______________________________

RA: ______________________________ Turma

Questões	Notas
Q1	2.0
Q2	2.0
Q3	1.5
Q4	3.0
Q5	1.5
Total	10.0

- Desligue o celular.
- A prova contém cinco questões. Resolva cada questão em sua respectiva folha.
- Não retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.
- Não é permitido o uso de calculadoras.
- Respostas sem justificativas não serão consideradas.

Justifique suas respostas!

Questão 1. (2.0 pontos) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(2) = 2$ e $g'(2) = 2$.

(a) Calcule $H'(2)$, onde $H(x) = g(g(g(x)))$.

(b) Determine a reta tangente ao gráfico de H no ponto $(2, 2)$.

Solução: (a) Aplicando a regra da cadeia temos

$$H'(x) = g'(g(g(x)))g'(g(x))g'(x).$$

Logo, como $g(2) = g'(2) = 2$,

$$H'(2) = g'(g(g(2)))g'(g(2))g'(2) = g'(g(2))g'(2)2 = g'(2)4 = 8.$$

(b) Lembremos que a equação da reta tangente que passa pelo ponto (x_0, y_0) e tem coeficiente angular m é dada por $y - y_0 = m(x - x_0)$. No nosso caso, temos que a reta deve passar pelo ponto $(2, 2)$ e tem coeficiente angular $m = H'(2) = 8$; portanto, sua equação é dada por

$$y - 2 = 8(x - 2).$$

Questão 2. (2.0 pontos)

(a) Seja y uma função diferenciável em relação a x tal que $x^{2/3} + y^{1/3} = 1$. Calcule y'.

(b) Determine $f'(x)$ se $f(x) = e^{x^2} \ln(1 + \sqrt{x})$.

Solução: (a) Derivando implicitamente ambos os lados da igualdade $x^{2/3}+y^{1/3} = 1$, em relação a x, e usando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{1}{3}y^{-2/3}y' = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y^{-2/3}y' = -2x^{-1/3} \qquad \Longrightarrow \qquad y' = -\frac{2x^{-1/3}}{y^{-2/3}}.$$

(b) Usando as regras do produto e da cadeia,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{x^2})' \ln(1 + \sqrt{x}) + e^{x^2}(\ln(1 + \sqrt{x}))' \\ &= 2xe^{x^2} \ln(1 + \sqrt{x}) + e^{x^2} \frac{1}{1 + \sqrt{x}}(1 + \sqrt{x})' \\ &= 2xe^{x^2} \ln(1 + \sqrt{x}) + e^{x^2} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Questão 3. (1.5 ponto) Avalie os limites abaixo e encontre o correspondente valor caso exista.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + x)^{1/x}$.

Solução: (a) Como $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x} = 0$, temos uma indeterminação do tipo $0 \cdot \infty$. Vamos então usar a regra de L'Hospital. Para isso notemos que

$$\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{x}}{\frac{1}{x}},$$

de forma que agora temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Assim, pela regra de L'Hospital,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{x} \left(-\dfrac{\pi}{x^2}\right)}{\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \pi \cos \frac{\pi}{x} \\
&= \pi,
\end{aligned}$$

onde usamos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos \dfrac{\pi}{x} = 1$.

(b) Aqui temos uma indeterminação do tipo 1^∞. Assim, fazendo $y = (e^x + x)^{1/x}$ temos que

$$\lim_{x\to 0} (e^x + x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} e^{\ln y} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \ln y}. \tag{1}$$

Portanto é suficiente calcularmos $\lim\limits_{x\to 0} \ln y$. Mas como

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(e^x + x)}{x},$$

temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Logo, pela regra de L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + 1}{e^x + x} = 2. \tag{2}$$

De (1) e (2) segue que

$$\lim_{x\to 0} (e^x + x)^{1/x} = e^2.$$

Questão 4. (3.0 pontos) Seja $f(x) = \dfrac{x^3}{x-2}$.

(a) (1.0) Determine os intervalos de crescimento/decrescimento de f, e os seus pontos de máximo e mínimo local, se existirem.

(b) (0.8) Determine os intervalos onde f é côncava para cima/baixo e os seus pontos de inflexão, se existirem.

(c) (0.4) Caso existam, encontre as assíntotas horizontais e verticais de f.

(d) (0.8) Esboce o gráfico de f usando (pelo menos) as informações obtidas nos itens (a), (b) e (c).

Solução: (a) Primeiramente note que o domínio de f é o conjunto $D = \{x \in \mathbb{R};\, x \neq 2\}$. Vamos agora calcular a derivada de f:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-2) - x^3}{(x-2)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}.$$

Por um lado, vemos que $f'(x) > 0$ se $x > 3$. Por outro, $f'(x) < 0$ se $x \in (2,3)$ e $f'(x) \leq 0$ se $x \in (-\infty, 2)$, sendo que $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Assim, pelo Teste Crescente/Decrescente f é crescente no intervalo $(3, +\infty)$ e decrescente nos intervalos $(-\infty, 2)$ e $(2,3)$.

Para determinar os pontos de máximo e mínimos locais de f, observe que $x = 0$ e $x = 3$ são os únicos pontos críticos de f (pois a derivada de f se anula nestes e somente nestes pontos). Note também que, apesar da derivada não existir em $x = 2$, este não é um ponto crítico pois $2 \notin D$. Agora, observe que o sinal de f' muda de negativo para positivo em 3, donde segue, pelo Teste da Primeira Derivada, que 3 é um ponto de mínimo local de f. Também como f' não muda de sinal em 0, o Teste da Primeira Derivada implica que 0 não é ponto nem de máximo nem de mínimo local.

(b) Temos

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(6x^2 - 12x)(x-2)^2 - 2(x-2)(2x^3 - 6x^2)}{(x-2)^4} \\ &= \frac{6x(x-2)^2 - 4x^2(x-3)}{(x-2)^3} \\ &= \frac{2x(x^2 - 6x + 12)}{(x-2)^3}. \end{aligned}$$

Como a função $h(x) = x^2 - 6x + 12$ é sempre positiva, o sinal de $f''(x)$ é igual ao sinal de $g(x) = x/(x-2)^3$. Agora observe,

- se $x < 0$ temos $g(x) > 0$ e, pelo Teste de Concavidade, f é côncava para cima;
- se $x \in (0, 2)$ temos $g(x) < 0$ e, pelo Teste de Concavidade, f é côncava para baixo;
- se $x > 2$ temos $g(x) > 0$ e novamente f é côncava para cima.

(c) Aplicando a regra de L'Hospital temos

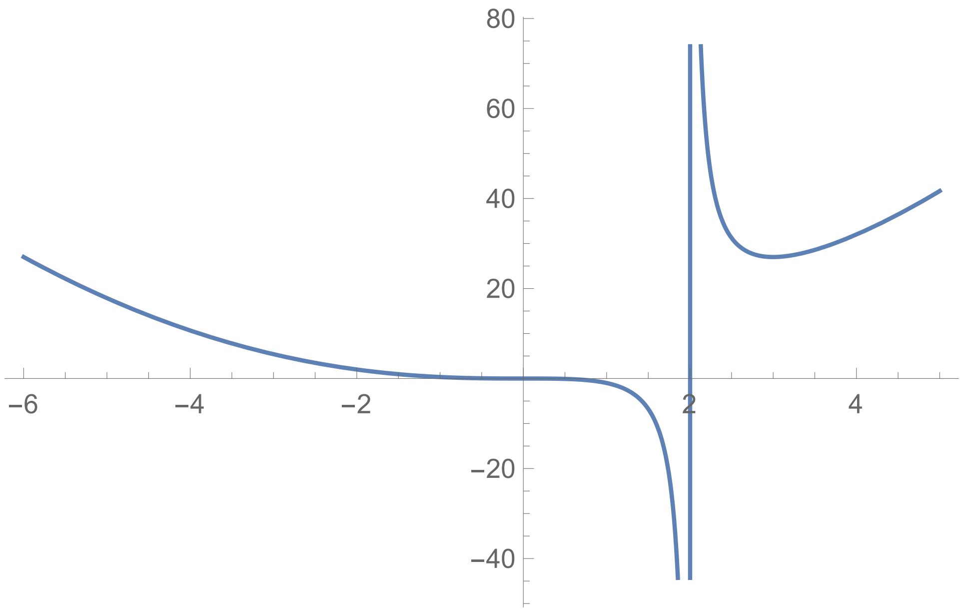
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

e portanto f não possui assintotas horizontais. Também,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty.$$

Logo, $y = 2$ é uma assintota vertical. Não existem outras assintotas verticais porque f é contínua em seu domínio.

(d) Um esboço do gráfico é dado abaixo



Questão 5. (1.5 ponto) Uma empresa vende bolsas. A função que fornece o lucro mensal obtido, em milhões de reais, em termos de número de bolsas vendidas é $L(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 2$, onde x é medido em milhares de unidades.

(a) O que acontece se a empresa não vender nenhuma bolsa no mês?

(b) Qual é o lucro se a empresa vender 1.000 bolsas?

(c) Quantas bolsas devem ser vendidas para que a empresa tenha o maior lucro mensal possível?

Solução: (a) Como $L(0) = -2$, a empresa terá um prejuízo de 2 milhões de reais.

(b) Como 1.000 bolsas equivale a 1 milhar de bolsas e $L(1) = 1$, a empresa terá um lucro de 1 milhão de reais.

(c) A ideia aqui é maximizar a função $L(x)$. Primeiro note que, pelo que fizemos em (a) e (b), a empresa terá lucro no mês se ela fabricar fabricar bolsas. Assim, devemos maximizar a função $L(x)$ sabendo que $x > 0$. Temos

$$L'(x) = -3x^2 + 6x + 1,$$

de modo que os pontos críticos de L (em $\mathbb{R}$) são $1 \pm \frac{\sqrt{48}}{6}$. Como $1 - \frac{\sqrt{48}}{6} < 0$, o único ponto crítico de interesse é $1 + \frac{\sqrt{48}}{6}$.

Agora notando que $L''(x) = -6x + 6$ e

$$L''\left(1 + \frac{\sqrt{48}}{6}\right) = -6\left(1 + \frac{\sqrt{48}}{6}\right) + 6 = -\frac{\sqrt{48}}{6} < 0,$$

segue, pelo teste da segunda derivada, que $1 + \frac{\sqrt{48}}{6}$ é, de fato, um ponto de máximo de L. Disso concluímos que a empresa deve vender $1 + \frac{\sqrt{48}}{6}$ milhares de bolsas para obter um lucro máximo.