Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp

MA111- Primeiro Semestre de 2019

Prova 2 - 24/05/2019 (6^a - Manhã)

Nome: GABARITO ____

RA: ____ Turma

Questões	Notas
Q1	2.0
Q2	2.0
Q3	1.5
Q4	3.0
Q5	1.5
Total	10.0

- Desligue o celular.
- A prova contém cinco questões. Resolva cada questão em sua respectiva folha.
- Não retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.
- Não é permitido o uso de calculadoras.
- Respostas sem justificativas não serão consideradas.

Justifique suas respostas!

Questão 1. (2.0 pontos) Calcule as derivadas das seguintes funções.

(a) $f(x) = xe^{\operatorname{sen}^2 x} + x^3$;

(b) $g(x) = \dfrac{\ln(\sqrt{x^2+1})}{x^2}$.

Solução: (a) Usando a regra do produto e a regra da cadeia obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)'e^{\operatorname{sen}^2 x} + x(e^{\operatorname{sen}^2 x})' + 3x^2 \\ &= e^{\operatorname{sen}^2 x} + xe^{\operatorname{sen}^2 x} 2 \operatorname{sen} x \cos x + 3x^2 \\ &= (1 + 2x \operatorname{sen} x \cos x)e^{\operatorname{sen}^2 x} + 3x^2. \end{aligned}$$

(b) **Solução 1:** Primeiro vamos simplificar a expressão:

$$g(x) = \frac{1}{2}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}.$$

Agora, usando a regra do quociente e a regra da cadeia obtemos

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2}\frac{\dfrac{1}{x^2+1}.2x.x^2 - \ln(x^2+1)2x}{x^4} \\ &= \frac{\dfrac{x^3}{x^2+1} - x\ln(x^2+1)}{x^4} \\ &= \frac{x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1)}{x^3(x^2+1)}. \end{aligned}$$

Solução 2: (sem usar a simplificação) Usando a regra do quociente e a regra da cadeia obtemos

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}.\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}.2x.x^2 - \ln(\sqrt{x^2+1})2x}{x^4} \\ &= \frac{\dfrac{x^3}{x^2+1} - 2x\ln(\sqrt{x^2+1})}{x^4} \\ &= \frac{x^2 - 2(x^2+1)\ln(\sqrt{x^2+1})}{x^3(x^2+1)}. \end{aligned}$$

Questão 2. (2.0 pontos) O óleo de um recipiente está sendo derramado e se espalha em uma forma circular cujo raio cresce a uma taxa constante de 4 metros por minuto.

(a) (1.5) Determine a taxa com que a área do derramamento está crescendo quando o raio dele for de 40 metros.

(b) (0.5) Determine a área do derramamento 5 minutos depois do início.

Solução: (a) Temos que a área A é dada por $A(t) = \pi r(t)^2$. Portanto, a taxa com que a área de derramamento está crescendo é dada por $A'(t)$. Usando a regra da cadeia obtemos que $A'(t) = \pi 2r(t)r'(t)$. Como $r'(t) = 4\ m/s$ concluímos que $A'(t) = 8\pi r(t)$. Portanto, quando o raio for de 40 metros obtemos que $A'(t) = 8\pi 40 = 320\pi$. Logo, a taxa com que a área do derramamento está crescendo quando o raio for de 40 metros é de $320\pi\ m^2/s$.

(b) Após 5 minutos do início do derramamento o raio da mancha será de $4 \times 5 = 20$ metros já que o raio cresce a uma taxa constante de 4 metros por minuto. Logo, a área do derramamento será de $400\pi\ m^2$.

Questão 3. (1.5 ponto) Avalie os limites abaixo e encontre o correspondente valor caso exista.

(a) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$;

(b) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x$.

Solução: (a) Temos uma indeterminação do tipo "$\infty - \infty$". Manipulando a expressão obtemos

$$\sqrt{x^2 + x} - x = x(\sqrt{1 + 1/x} - 1) = \frac{\sqrt{1 + 1/x} - 1}{1/x}.$$

Agora temos uma indeterminação do tipo "$\frac{0}{0}$". Usando a Regra de L'Hospital obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1 + 1/x} - 1}{1/x} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{(1/2)(1 + 1/x)^{-1/2}(-1/x^2)}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(b) Pela continuidade da função exponencial obtemos que

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x = e^{\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\left(1 - \frac{3}{x}\right)^x\right)} = e^{\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)}.$$

Portanto, precisamos calcular o limite que aparece no lado direito da igualdade acima. Mas

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 - \frac{3}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)}{1/x},$$

o que é uma indeterminação do tipo "$\frac{\infty}{\infty}$". Usando a regra de L'Hospital obtemos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)}{1/x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{1 - \frac{3}{x}} \cdot \frac{3}{x^2}}{-1/x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3}{1 - \frac{3}{x}} = -3.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x = e^{-3}.$$

Questão 4. (3.0 pontos) Seja $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

(a) (1.0) Determine os intervalos de crescimento/decrescimento de f, e os seus pontos de máximo e mínimo local, se existirem.

(b) (0.8) Determine os intervalos onde f é côncava para cima/baixo e os seus pontos de inflexão, se existirem.

(c) (0.4) Caso existam, encontre as assíntotas horizontais e verticais de f.

(d) (0.8) Esboce o gráfico de f usando (pelo menos) as informações obtidas nos itens (a), (b) e (c).

Solução: (a) Para encontrar os intervalos de crescimento/descrescimento de f e seus pontos de máximo e mínimo local, precisamos analisar a derivada de f:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1).$$

É claro que no conjunto $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ temos que $f'(x) > 0$ e no intervalo $(-1, 1)$ temos que $f'(x) < 0$. Portanto, pelo Teste Crescente/Decrescente, a função f é crescente nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$ e decrescente em $(-1, 1)$.

Agora note que f é diferenciável em todos os pontos do seu domínio (que é o conjunto dos números reais). Assim, os pontos críticos de f são aqueles em que a derivada se anula. Como $f'(x) = 0$ se e somente se $x = -1$ ou $x = 1$, estes são seus únicos pontos críticos. Além disso, como $f''(1) = 6$ e $f''(-1) = -1$ segue, pelo Teste da derivada segunda, que $x = -1$ é ponto de máximo local e $x = 1$ é ponto de mínimo local. (Aqui também podemos usar o Teste da derivada Primeira).

(b) Para analisar a concavidade do gráfico de f vamos analisar a segunda derivada de f:

$$f''(x) = 6x.$$

Como $f''(x) > 0$ em $(0, +\infty)$ temos, pelo Teste de Concavidade, que nesse intervalo o gráfico de f é côncavo para cima. No intervalo $(-\infty, 0)$ temos que $f''(x) < 0$ e portanto, novamente pelo Teste de Concavidade, neste intervalo o gráfico de f é côncavo para baixo. Por fim, como em $x = 0$ há mudança de concavidade temos que este é um ponto de inflexão.

(c) Como f é um polinômio, e portanto contínua em $\mathbb{R}$, não há assíntota vertical. Para calcular as assíntotas horizontais precisamos verificar o limite de f no infinito:

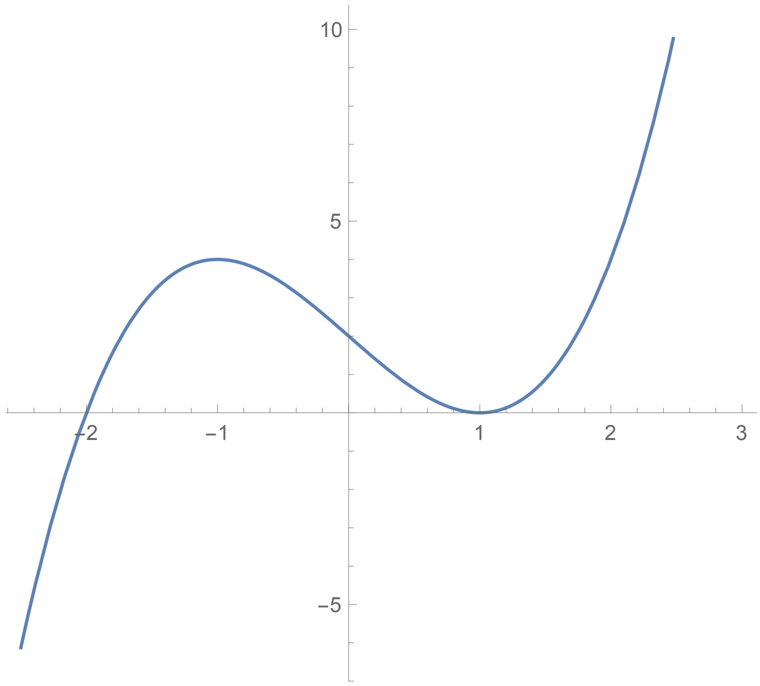
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x + 2) = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x + 2) = -\infty.$$

Portanto, f não tem assíntota horizontal.

(d) Um esboço do gráfico é mostrado abaixo



Questão 5. (1.5 ponto) Encontre os pontos sobre a curva $-\dfrac{2}{3}x^3 + y^2 = 4$ que estão mais próximos do ponto $(2, 0)$.

Solução: A função distância de qualquer ponto (x, y) ao ponto $(2, 0)$ é dada por

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}.$$

Mas como queremos que ponto (x, y) esteja sobre a curva dada, devemos ter $y^2 = 4 + \dfrac{2}{3}x^3$. Logo

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + 4 + \frac{2}{3}x^3}.$$

Uma vez que a função d é não-negativa, minimizar d é equivalente a minimizar d^2. Portanto, basta calcular o mínimo da função

$$f(x) = (x-2)^2 + 4 + \frac{2}{3}x^3$$

restrita à condição $-\frac{2}{3}x^3 \leq 4$, ou seja, $x \geq -\sqrt[3]{6}$. Para calcular o mínimo de f vamos analisar a derivada de f:

$$f'(x) = 2(x-2) + 2x^2 = 2(x^2 + x - 2) = 2(x-1)(x+2).$$

Logo, os pontos críticos de f (em $\mathbb{R}$) são 1 e -2. Mas como $-2 < -\sqrt[3]{6}$, o único ponto crítico de interesse é 1. Notando que f é decrescente em $(-\sqrt[3]{6}, 1)$ e f é crescente em $(1, +\infty)$ segue do Teste da Primeira Derivada que $x = 1$ é ponto de mínimo absoluto. Consequentemente, $x = 1$ minimiza a função distância d. Logo, os pontos $(1, -\sqrt{14/3})$ e $(1, \sqrt{14/3})$ são os pontos da curva que estão mais próximo de $(2, 0)$.