Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp

MA111- Primeiro Semestre de 2019

Prova 2 - 24/05/2019 (6^a - Noturno)

Nome: GABARITO ______________________________

RA: ______________________________ Turma

Questões	Notas
Q1	2.0
Q2	2.0
Q3	1.5
Q4	3.0
Q5	1.5
Total	10.0

- Desligue o celular.
- A prova contém cinco questões. Resolva cada questão em sua respectiva folha.
- Não retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.
- Não é permitido o uso de calculadoras.
- Respostas sem justificativas não serão consideradas.

Justifique suas respostas!

Questão 1. (2.0 pontos) Considere a curva definida pela equação $x^3 - y^2 + 5xy = 7$.

(a) Calcule y'.

(b) Encontre a equação da reta tangente a curva no ponto $(1, 3)$.

Solução: (a) Derivando implicitamente ambos os lados da igualdade dada, em relação a x, obtemos

$$3x^2 - 2yy' + 5y + 5xy' = 0$$

e daí, se $5x \neq 2y$,

$$y' = -\frac{3x^2 + 5y}{5x - 2y}.$$

(b) Lembremos que a equação da reta que passa pelo ponto (x_0, y_0) e tem coeficiente angular m é dada por $y - y_0 = m(x - x_0)$. Como queremos a equação da reta tangente que passa pelo ponto $(1, 3)$, seu coeficiente angular deve ser dado por

$$m = y'\Big|_{(1,3)} = -\frac{3x^2 + 5y}{5x - 2y}\Big|_{(1,3)} = 18.$$

Portanto a equação da reta pedida é

$$y - 3 = 18(x - 1).$$

Questão 2. (2.0 pontos) Um balão esférico está sendo enchido a uma taxa de 5 m^3/s.

(a) (1.5) Encontre a taxa de crescimento do raio do balão quando o diâmetro for igual a $4m$.

(b) (0.5) Sabendo que num determinado instante o balão tem volume de 100 m^3, determine o volume após 5 segundos.

Solução: (a) Sejam $V = V(t)$ e $r = r(t)$ o volume e o raio do balão, medidos em m^3 e m, respectivamente. Sabemos que

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{1}$$

e, conforme dado no problema $V'(t) = 5$. Agora, derivando ambos os lados de (1), em relação a t, obtemos

$$V'(t) = 4\pi r^2 r'(t)$$

e daí,

$$4\pi r^2 r'(t) = 5. \tag{2}$$

Assim, conforme pedido no problema, queremos determinar $r'(t)$ quando $r = 2$. Logo, substituindo $r = 2$ em (2) segue que

$$r'(t) = \frac{5}{16\pi},$$

ou seja, o raio do balão estará crescendo a uma taxa de $5/16\pi\, m/s$.

(b) Como o balão está sendo enchido a uma taxa de 5 m^3/s, decorrido 5 segundos o volume do balão aumentará em 25 m^3. Logo, o volume do balão será de 125 m^3.

Questão 3. (1.5 ponto) Avalie os limites abaixo e encontre o correspondente valor caso exista.

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 \ln(x)$

Solução: (a) Inicialmente observe que o limite dado é uma indeterminação do tipo 0^0. Agora se $y = x^x$, temos

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \ln y}, \tag{3}$$

onde usamos o fato da função exponencial ser contínua da última igualdade. Assim, vemos que é suficiente calcularmos o limite

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} x \ln x.$$

Este último limite é uma indeterminação do tipo $0 \cdot \infty$. Logo, pela regra de L'Hospital,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \ln y &= \lim_{x\to 0^+} x \ln x \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{(regra de L'Hospital)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} (-x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, voltando em (3) segue

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1.$$

(b) Aqui temos um indeterminação do tipo $0 \cdot \infty$. Logo, pela regra de L'Hospital,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} x^3 \ln x &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^3}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} \quad \text{(regra de L'Hospital)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{x^3}{3}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Questão 4. (3.0 pontos) Seja $f(x) = xe^x$.

(a) (1.0) Determine os intervalos de crescimento/descrecimento de f, e os seus pontos de máximo/mínimo.

(b) (0.8) Determine os intervalos onde f é côncava para cima/baixo e os seus pontos de inflexão.

(c) (0.4) Caso existam, encontre as assíntotas horizontais e verticais de f.

(d) (0.8) Esboce o gráfico de f usando (pelo menos) as informações obtidas nos itens (a), (b) e (c).

Solução: (a) Para determinar os intervalos de crescimento de f precisamos estudar o sinal de f'. Temos

$$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x. \tag{4}$$

Como $e^x > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, vemos de (4) que $f'(x) > 0$ se $x \in (-1, \infty)$ e $f'(x) < 0$ se $x \in (-\infty, -1)$. Logo, pelo Teste Crescente/Decrescente segue que f é crescente no intervalo $(-1, \infty)$ e decrescente no intervalo $(-\infty, -1)$.

Também, como $f'(x)$ existe para qualquer $x \in \mathbb{R}$ seus pontos críticos são àqueles em que a derivada se anula. Assim, de (4) obtemos que $x = -1$ é o único ponto crítico de f. Ainda mais, como o sinal de f' muda de negativo para positivo em -1, o Teste da Primeira Derivada implica que -1 é um ponto de mínimo local de f. Observe também que f não possui pontos de máximo local.

(b) Para estudar a concavidade de f precisamos estudar o sinal de f''. Mas como

$$f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x,$$

e $e^x > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, obtemos que $f''(x) > 0$ se $x \in (-2, \infty)$ e $f''(x) < 0$ se $x \in (-\infty, -2)$. Logo, pelo Teste de Concavidade vemos que f é concava para cima no intervalo $(-2, \infty)$ e concava para baixo no intervalo $(-\infty, -2)$. Além disso, como há mudança de concavidade somente em $x = -2$ segue que -2 é o único ponto de inflexão de f.

(c) Para determinar as assintotas horizontais, primeiro note que

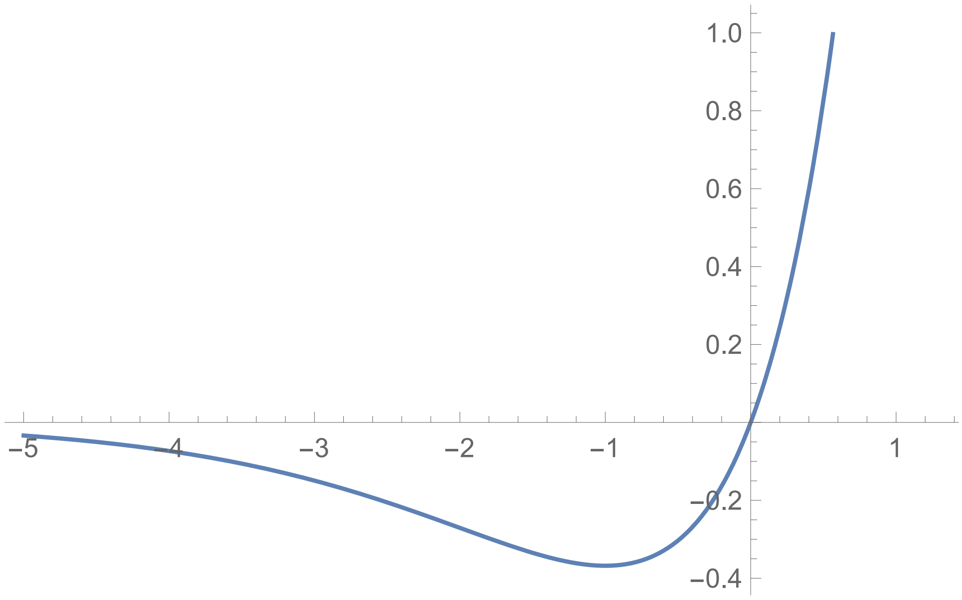
$$\lim_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$$

e, usando a regra de L'Hospital,

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{(-e^{-x})} = \lim_{x \to -\infty} (-e^x) = 0.$$

Assim, $y = 0$ é a única assintota horizontal. Além disso, como f é uma função contínua em todos os pontos do seu domínio, que é o conjunto de todos os números reais, ela não possui assintota vertical.

(d) Um esboço do gráfico de f é dado a seguir.



Questão 5. (1.5 ponto) Encontre o ponto sobre a curva $y = x^{3/2}$ que está mais próximo do ponto $(4, 0)$.

Solução: A função distância de qualquer ponto (x, y) ao ponto $(4, 0)$ é dada por

$$d = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}.$$

Como queremos que o ponto esteja sobre a curva dada, devemos ter $y^2 = x^3$, de modo que a função distância se reescreve como

$$d = \sqrt{(x-4)^2 + x^3}.$$

Como a função d é não-negativa encontrar um ponto de mínimo de d é equivalente a encontramos um ponto de mínimo de d^2. Assim, sabendo que $x \geq 0$ (pois (x, y) deve ser ponto da curva dada), nosso problema equivale a encontrar um mínimo da função

$$f(x) = (x-4)^2 + x^3, \qquad x \geq 0.$$

Como $f'(x) = 2(x-4) + 3x^2$ vemos que os pontos críticos de f (em $\mathbb{R}$) são $x = -2$ e $x = 4/3$. Mas como o domínio de f é o intervalo $[0, \infty)$ o único ponto crítico de interesse é $x = 4/3$. Agora como $f''(x) = 2 + 6x$ temos $f''(4/3) = 10$ e, portanto, pelo Teste da Segunda Derivada, $4/3$ é um ponto de mínimo (absoluto) de f, e consequentemente, de d.

Disso concluímos que o ponto da curva que está mais próximo de $(4, 0)$ é o ponto $(4/3, 8/\sqrt{27})$.

Observação: Uma outra maneira de justificar que $4/3$ é um mínimo absoluto de f, é usar o Teste da Primeira Derivada Para Valores Extremos Absolutos, uma vez que $f'(x) < 0$ se $x \in (0, 4/3)$ e $f'(x) > 0$ se $x \in (4/3, +\infty)$.