Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp

MA111- Primeiro Semestre de 2019

Prova 3 - 27/06/2019 (5^a - Noturno)

Nome: ____

RA: ______________________________________ **Turma** [   ]

Questões	Notas
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
Total	

- Desligue o celular.
- A prova contém cinco questões. Resolva cada questão em sua respectiva folha.
- Não retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.
- Não é permitido o uso de calculadoras.
- Respostas sem justificativas não serão consideradas.

Justifique suas respostas!

Questão 1. (1.5 pontos) Seja $h(x) = \displaystyle\int_0^{x^3+x} \frac{1}{3+t^2}dt$.

(a) (0.5) Determine $h(0)$.

(b) (1.0) Encontre $h'(x)$.

Solução: (a) Por definição, temos que

$$h(0) = \int_0^0 \frac{1}{3+t^2}dt = 0.$$

(b) Se $F(x) = \int_0^x \frac{1}{3+t^2}dt$, temos que $h(x) = F(x^3+x)$. Pela regra da cadeia, obtemos que

$$h'(x) = F'(x^3+x)(x^3+x)' = F'(x^3+x)(3x^2+1).$$

Mas, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$F'(x) = \frac{1}{3+x^2}.$$

Portanto,

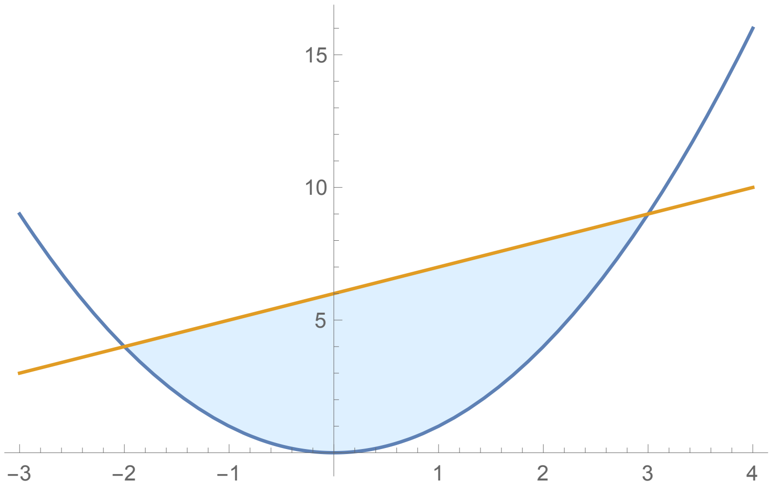
$$h'(x) = \frac{3x^2+1}{3+(x^3+x)^2}.$$

Questão 2. (2.0 pontos) Seja R a região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x + 6$.

(a) (0.7) Esboce R.

(b) (1.3) Calcule a área de R.

Solução: (a) Primeiro observe que os gráficos das funções dadas se interceptam em pontos de abscissas x satisfazendo $x^2 = x + 6$, ou seja, $x = -2$ e $x = 3$. Um esboço da região é, portanto, dado abaixo



(b) Observe que no intervalo $[-2, 3]$ o gráfico de $y = x + 6$ está acima do gráfico de $y = x^2$. Assim, a área $A(R)$ da região é dada por

$$
\begin{aligned}
A(R) &= \int_{-2}^{3} \Big((x+6) - x^2\Big) dx \\
&= \left(\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{3} \\
&= \frac{125}{6}.
\end{aligned}
$$

Questão 3. (2.0 pontos)

(a) (1.0) Use integração por partes para calcular $\int x^{-2} \ln x \, dx$.

(b) (1.0) Avalie se a integral imprópria

$$\int_6^\infty \frac{3}{(x-5)^3} dx$$

converge ou diverge. Se convergir, calcule seu valor.

Solução: (a) Vamos usar integração por partes. Para isso, se $f(x) = \ln x$ e $g'(x) = x^{-2}$ temos que $f'(x) = x^{-1}$ e $g(x) = -x^{-1}$. Logo, da fórmula de integração por partes, resulta que

$$\begin{aligned}
\int x^{-2} \ln x dx &= \int f(x) g'(x) dx \\
&= f(x)g(x) - \int f'(x) g(x) dx \\
&= -x^{-1} \ln x - \int (-x^{-1}) x^{-1} dx \\
&= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2} dx \\
&= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C,
\end{aligned}$$

onde C é uma constante arbitrária.

(b) Por definição temos

$$\int_6^\infty \frac{3}{(x-5)^3} dx = \lim_{t \to +\infty} \int_6^t \frac{3}{(x-5)^3} dx.$$

Agora, para resolver a integral do lado direito da igualdade acima, fazemos a mudança de variáveis $u = x - 5$ para obter $du = dx$ e

$$\int_6^t \frac{3}{(x-5)^3} dx = \int_1^{t-5} \frac{3}{u^3} du = -\frac{3}{2u^2}\bigg|_1^{t-5} = -\frac{3}{2(t-5)^2} + \frac{3}{2}.$$

Assim,

$$\int_6^{+\infty} \frac{3}{(x-5)^3} dx = \lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{3}{2(t-5)^2} + \frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2},$$

pois $\lim_{t \to +\infty} \frac{3}{2(t-5)^2} = 0$.

Portanto, a integral converge e seu valor é $3/2$.

Questão 4. (2.5 pontos) Calcule as seguintes integrais.

(a) (1.0) $\displaystyle\int x^3 \text{sen}(x^4+2)dx$;

(b) (1.5) $\displaystyle\int \frac{-x^2+x+1}{x(x^2+1)}dx$.

Solução: (a) Fazendo a mudança de variáveis $u = x^4 + 2$ temos que $du = 4x^3dx$ e assim,

$$\begin{aligned}\int x^3 \,\text{sen}(x^4+2)dx &= \frac{1}{4}\int \text{sen}\, u\, du \\ &= -\frac{1}{4}\cos u + c \\ &= -\frac{1}{4}\cos(x^4+2) + c.\end{aligned}$$

(b) Por frações parcias, temos que encontrar números reais A, B, C tais que

$$\frac{-x^2+x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

ou equivalentemente, $(A+B)x^2 + Cx + A = -x^2 + x + 1$. Daqui, prontamente resulta que

$$A = 1, \quad B = -2 \quad \text{e} \quad C = 1.$$

Disso,

$$\begin{aligned}\int \frac{-x^2+x+1}{x(x^2+1)}dx &= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{-2x+1}{x^2+1}dx \\ &= \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx \\ &= \ln|x| - \ln|x^2+1| + \arctan x + c,\end{aligned}$$

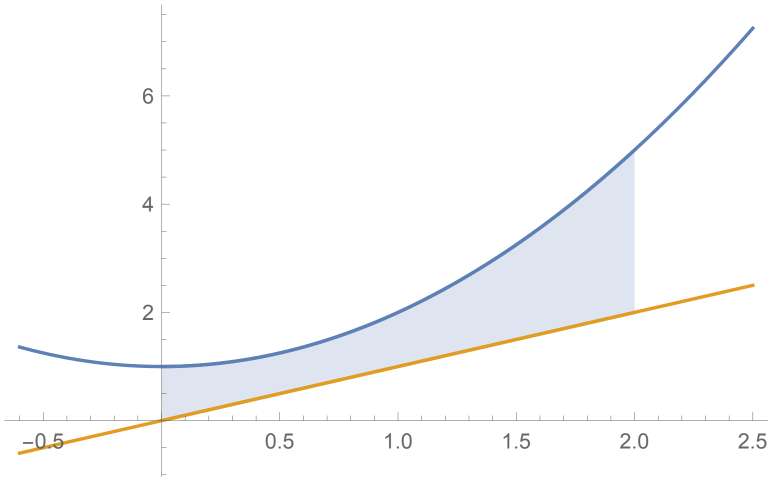
onde para a integral $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$ fizemos a mudança $u = x^2 + 1$.

Questão 5. (2.0 pontos) Seja R a região entre as curvas $y = x$ e $y = x^2 + 1$, para x no intervalo $[0, 2]$.

(a) (0.5) Esboce a região R.

(b) (1.5) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo x.

Solução: (a) Um esboço da região é dado abaixo



(b) O volume V do sólido em questão é dado pela diferença $V = V_1 - V_2$ onde:

• V_1 é o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região delimitada pela curva $y = x^2 + 1$ e pelas retas $x = 0$ e $x = 2$.

• V_2 é o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região delimitada pela curva $y = x$ e pelas retas $x = 0$ e $x = 2$.

Dessa maneira, temos que

$$V_1 = \int_0^2 \pi(x^2+1)^2 dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right) \Big|_0^2 = \frac{206\pi}{15}$$

e

$$V_2 = \int_0^2 \pi x^2 dx = \pi \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8\pi}{3}.$$

Logo,

$$V = V_1 - V_2 = \frac{206\pi}{15} - \frac{8\pi}{3} = \frac{166\pi}{15}.$$

Observação: Uma outra maneira de resolver, é observar que a seção transversal do sólido em qualquer plano perpendicular ao eixo x passando por x é um anel de raio interno x e raio externo $x^2 + 1$, cuja área é $A(x) = \pi(x^2+1)^2 - \pi x^2$. Logo,

$$V = \int_0^2 A(x) dx = \frac{166\pi}{15}.$$