Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp

MA111- Primeiro Semestre de 2019

Prova 3 - 27/06/2019 (5^a - Tarde)

Nome: ______________________________

RA: ______________________________ Turma

Questões	Notas
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
Total	

- Desligue o celular.
- A prova contém cinco questões. Resolva cada questão em sua respectiva folha.
- Não retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.
- Não é permitido o uso de calculadoras.
- Respostas sem justificativas não serão consideradas.

Justifique suas respostas!

Questão 1. (2.0 pontos) Seja

$$h(x) = \int_2^{e^x+1} \frac{1}{(1+t^2)^7}\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) (0.5) Mostre que o gráfico de h passa pelo ponto $(0, 0)$.

(b) (1.5) Calcule $h'(x)$.

Solução: (a) Observe que $h(0) = 0$. Portanto, o gráfico de h passa pela origem.

(b) Sejam $g(x) = e^x + 1$ e

$$f(x) = \int_2^{x} \frac{1}{(1+t^2)^7}\, dt.$$

Agora observe que $h(x) = f(g(x))$. Assim, pela regra da cadeia temos $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$. Mas $g'(x) = e^x$ e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$f'(x) = \frac{1}{(1+(e^x+1)^2)^7}.$$

Logo,

$$h'(x) = \frac{e^x}{(1+(e^x+1)^2)^7} = \frac{e^x}{(2+2e^x+e^{2x})^7}.$$

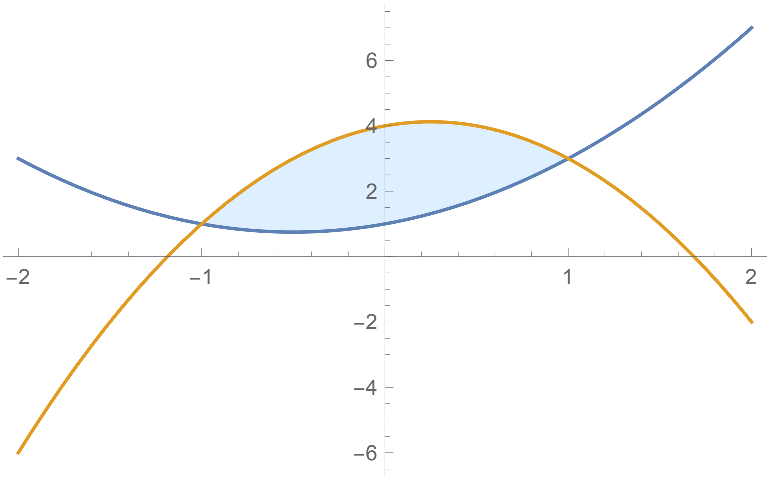
Questão 2. (2.5 pontos) Seja R a região limitada pelos gráficos das funções $y = x^2 + x + 1$ e $y = -2x^2 + x + 4$.

(a) (1.0) Esboce a região R.

(b) (1.5) Calcule a área de R.

Solução: (a) Primeiro note que os gráficos da duas funções dadas se encontram em pontos de abscissas x satisfazendo $x^2+x+1 = -2x^2+x+4$, ou seja, $x = \pm 1$. Note também que x^2+x+1 intecepta o eixo y em $y = 1$ enquanto que $-2x^2 + x + 4$ intecepta o eixo y em $y = 4$.

Um esboço da região é, portanto, dado abaixo



(b) Observe que no intervalo $[-1, 1]$ o gráfico de $y = -2x^2 + x + 4$ está por cima do gráfico de $y = x^2 + x + 1$. Assim, a área $A(R)$ da região é dada por

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_{-1}^{1} \Big((-2x^2 + x + 4) - (x^2 + x + 1) \Big)\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} (-3x^2 + 3)\, dx \\ &= 4. \end{aligned}$$

Questão 3. (2.0 pontos)

(a) (1.0) Determine $\displaystyle\int \ln(x)dx$.

(b) (1.0) Calcule $\displaystyle\int \frac{3}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

Solução: (a) Vamos usar integração por partes. Para isso, sejam $u = \ln x$ e $dv = dx$, de modo que $du = (1/x)dx$ e $v = x$. Logo,

$$\begin{aligned}\int \ln(x)dx &= \int udv = uv - \int vdu \\ &= x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx \\ &= x\ln(x) - x + C,\end{aligned}$$

onde C é uma constante arbitrária.

(b) A presença do fator $\sqrt{1+x^2}$ no denominador sugere que façamos a mudança de coordenadas $x = \mathrm{tg}(u)$, com u no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Desta forma, $dx = \sec^2(u)\,du$. Substituindo na integral e usando a identidade trigonométrica $1 + \mathrm{tg}^2(u) = \sec^2(u)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{3}{x^2\sqrt{2+x^2}}\,dx &= \int \frac{3\sec^2(u)}{\mathrm{tg}^2(u)\sqrt{1+\mathrm{tg}^2(u)}}\,du \\
&= \int \frac{3\sec^2(u)}{\mathrm{tg}^2(u)\sec(u)}\,du \\
&= 3\int \frac{\sec(u)}{\mathrm{tg}^2(u)}\,du \\
&= 3\int \frac{\cos(u)}{\mathrm{sen}^2(u)}\,du \\
(t = \mathrm{sen}\,(u)) \quad &= 3\int \frac{1}{t^2}\,dt \\
(t = \mathrm{sen}\,(u)) \quad &= -\frac{3}{t} + C \\
(t = \mathrm{sen}\,(u)) \quad &= -\frac{3}{\mathrm{sen}\,(u)} + C.
\end{aligned}$$

Note que na segunda igualdade usamos o fato de $\sqrt{\sec^2(u)} = \sec(u)$. Isso é verdade porque no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ a função secante é positiva.

Precisamos agora desfazer a mudança de coordenadas de u para x. Para isso, se $\mathrm{tg}(u) = x$ então $\mathrm{sen}\,(u) = x/\sqrt{1+x^2}$. Portanto

$$\int \frac{3}{x^2\sqrt{2+x^2}}\,dx = -3\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

Questão 4. (1.5 ponto) Estude se a integral imprópria

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

converge ou diverge. Se ela for convergente, calcule seu valor.

Solução: Por definição temos que

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \lim_{r\to\infty} \int_1^r \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

Mas,

$$\int_1^r \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int_1^r \frac{1}{x^3}\, dx + \int_1^r \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\bigg|_1^r - \frac{1}{x}\bigg|_1^r = \frac{3}{2} - \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{r}.$$

Portanto, fazendo o limite quando $r \to \infty$, vemos que a integral converge e

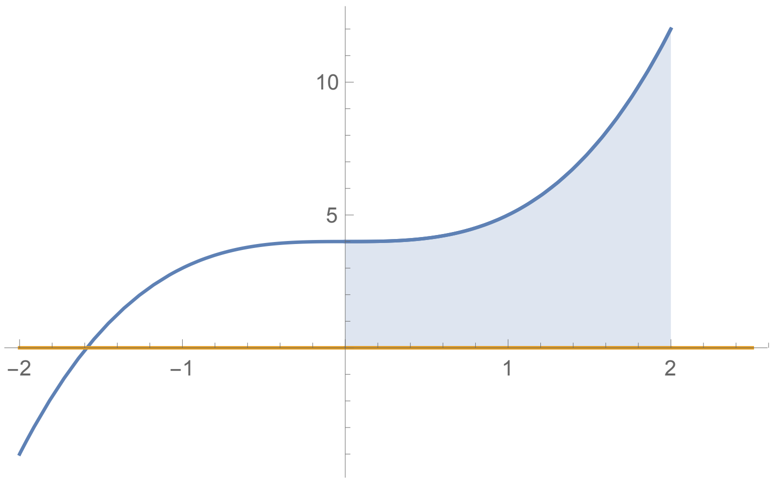
$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \lim_{r\to\infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{r}\right) = \frac{3}{2}.$$

Questão 5. (2.0 pontos) Seja R a região entre o gráfico de função $y = x^3 + 4$ e o eixo x, para $x \in [0, 2]$.

(a) (0.5) Esboce a região R.

(b) (1.5) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo x.

Solução: (a) Um esboço da região é dado abaixo



(b) Se conseguirmos obter uma função $A(x)$ que nos dê a área de cada seção transversal no nível x, e se esta função for contínua, o volume será dado por

$$V = \int_0^2 A(x)\, dx.$$

Note que a seção transversal no nível x é um círculo de raio y. Assim $A(x) = \pi(x^3 + 4)^2$. Portanto o volume é

$$V = \pi \int_0^2 (x^3 + 4)^2\, dx = \pi \int_0^2 (x^6 + 8x^3 + 16)\, dx = \pi \left(\frac{x^7}{7} + 2x^4 + 16x \right) \Bigg|_0^2 = \frac{576\pi}{7}.$$