Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp

MA111- Primeiro Semestre de 2019

Prova 3 - 28/06/2019 (6^a - Noturno)

Nome: ______________________________

RA: ______________________________ **Turma** [ ]

Questões	Notas
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
Total	

- Desligue o celular.
- A prova contém cinco questões. Resolva cada questão em sua respectiva folha.
- Não retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.
- Não é permitido o uso de calculadoras.
- Respostas sem justificativas não serão consideradas.

Justifique suas respostas!

Questão 1. (1.5 pontos) Seja $h(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(e^t)dt$.

(a) (0.5) Determine $h(0)$.

(b) (1.0) Encontre $h'(x)$.

Solução: (a) Aqui temos

$$h(0) = \int_0^0 \operatorname{sen}(e^t)dt = 0.$$

(b) Sejam $g(x) = x^2$ e

$$f(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(e^t)\,dt.$$

Agora observe que $h(x) = f(g(x))$. Assim, pela regra da cadeia temos $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$. Mas $g'(x) = 2x$ e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$f'(x) = \operatorname{sen}(e^x).$$

Logo,

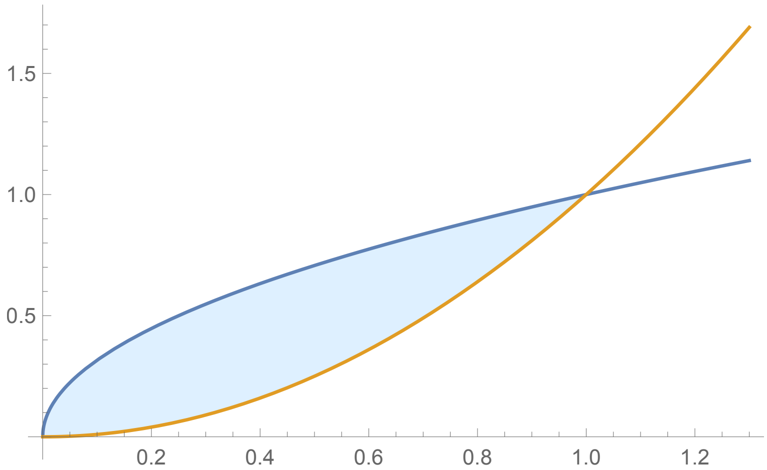
$$h'(x) = \operatorname{sen}(e^{x^2})2x.$$

Questão 2. (2.0 pontos) Considere as funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$, definidas no intervalo $[0, 1]$.

(a) (0.7) Esboce a região R limitada pelos gráficos de f e g.

(b) (1.3) Calcule a área de R.

Solução: (a) Um esboço da região é dado abaixo



(b) Observe que no intervalo $[0, 1]$ o gráfico de $y = \sqrt{x}$ está acima do gráfico de $y = x^2$. Assim, a área $A(R)$ da região é dada por

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx \\ &= \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3})\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Questão 3. (2.0 pontos)

(a) (1.0) Determine $\displaystyle\int x^{1/3}\ln(x)dx$.

(b) (1.0) Avalie se a integral imprópria

$$\int_1^\infty \frac{1}{(x+2)^{1/4}}dx$$

converge ou diverge. Se convergir, calcule seu valor.

Solução: (a) Vamos usar integração por partes. Para isso, sejam $u = \ln x$ e $dv = x^{1/3}dx$, de modo que $du = (1/x)dx$ e $v = (3/4)x^{4/3}$. Logo,

$$\begin{aligned}\int x^{1/3}\ln(x)dxdx &= \int udv = uv - \int vdu \\ &= \frac{3}{4}x^{4/3}\ln(x) - \frac{3}{4}\int x^{4/3}\frac{1}{x}dx \\ &= \frac{3}{4}x^{4/3}\ln(x) - \frac{3}{4}\int x^{1/3}dx \\ &= \frac{3}{4}x^{4/3}\ln(x) - \frac{9}{16}x^{4/3} + C,\end{aligned}$$

onde C é uma constante arbitrária.

(b) Por definição temos

$$\int_1^\infty \frac{1}{(x+2)^{1/4}}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{(x+2)^{1/4}}dx.$$

Agora, para resolver a integral do lado direito da igualdade acima, fazemos a mudança de variáveis $u = x+2$ para obter $du = dx$ e

$$\int_1^t \frac{1}{(x+2)^{1/4}}dx = \int_3^{t+2}\frac{1}{u^{1/4}}du = \frac{4}{3}u^{3/4}\Big|_3^{t+2} = \frac{4}{3}((t+2)^{3/4} - 3^{3/4}).$$

Como

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{4}{3}((t+2)^{3/4} - 3^{3/4}) = +\infty$$

segue portanto que a integral é divergente.

Questão 4. (2.5 pontos) Calcule as seguintes integrais.

(a) (1.0) $\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^5(x)dx$;

(b) (1.5) $\int \frac{x+1}{x^3-5x^2+6x}dx$.

Solução: (a) Primeiramente notemos que

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^5(x)dx &= \int \operatorname{sen}^3(x)(\cos^2(x))^2\cos(x)dx\\ &= \int \operatorname{sen}^3(x)(1-\operatorname{sen}^2(x))^2\cos(x)dx.\end{aligned}$$

Agora fazemos a mudança de variáveis $u = \operatorname{sen}(x)$ de modo que $du = \cos(x)dx$. Logo,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^5(x)dx &= \int u^3(1-u^2)^2du\\ &= \int (u^3-2u^5+u^7)du\\ &= \frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{3}u^6 + \frac{1}{8}u^8 + C\\ &= \frac{1}{4}\operatorname{sen}^4(x) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^6(x) + \frac{1}{8}\operatorname{sen}^8(x) + C.\end{aligned}$$

Observação: Como a potência da função seno também é impar poderíamos da mesma forma fazer a mudança de variável $u = \cos(x)$.

(b) Por frações parciais, temos que encontrar números reais A, B, C tais que

$$\frac{x+1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$$

ou equivalentemente, $A(x^2-5x+6) + Bx(x-3) + Cx(x-2) = x+1$. Daqui, segue que

$$\begin{cases} A+B+C = 0,\\ -5A-3B-2C = 1,\\ 6A = 1,\end{cases}$$

ou seja, $A = 1/6$, $B = -3/2$ e $C = 4/3$. Logo,

$$\begin{aligned}\int\int \frac{x+1}{x^3-5x^2+6x}dx &= \frac{1}{6}\int \frac{1}{x}dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-2}dx + \frac{4}{3}\int \frac{1}{x-3}dx\\ &= \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{3}{2}\ln|x-2| + \frac{4}{3}\ln|x-3| + C,\end{aligned}$$

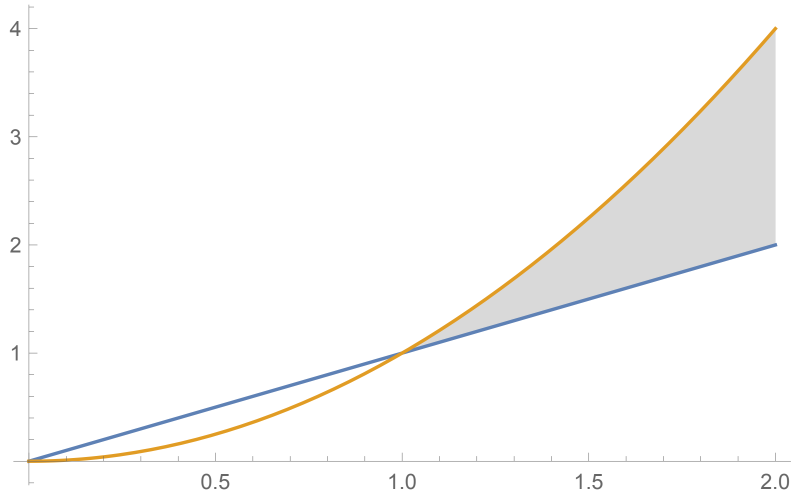
onde C é uma constante arbitrária.

Questão 5. (2.0 pontos) Considere a região R limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$ no intervalo $[1, 2]$.

(a) (0.5) Esboce a região R.

(b) (1.5) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo x.

Solução: (a) Um esboço da região é dao abaixo



(b) Observe que a interseção do sólido com um plano perpendicular ao eixo x é um anel de raio externo x^2 e raio interno x, cuja área é

$$A(x) = \pi x^4 - \pi x^2.$$

Logo, o volume do sólido é dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 A(x)dx \\ &= \pi \int_1^2 (x^4 - x^2)dx \\ &= \pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_1^2 \\ &= \frac{58\pi}{15}. \end{aligned}$$