IMECC/Unicamp
MA111 - Cálculo I
Exame final
19 de julho - 2a feira - manhã

RA: __________ **Nome: GABARITO**

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	3	2	3	2	10
Nota:					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

1. Essa prova terá início às 07h30 do dia 19 de julho de 2021. Você terá duas horas para resolvê-la e mais 30 minutos para preparar um arquivo com sua resolução e enviar através do "Google Sala de Aula".
2. Você deverá escrever a **resolução detalhada** das questões em folhas de papel sulfite branca. Respostas não acompanhadas de argumentos que as confirmem não serão consideradas.
3. Você deverá colocar seu nome, RA e sua assinatura em todas as folhas e numerar as páginas no formato {`página atual`}/{`total de páginas`}. Uma nova questão sempre deve ser iniciada numa página nova, isto é, nenhuma página deve ter partes de mais do que uma questão.
4. A digitalização da prova deve estar suficientemente legível e entregue preferencialmente como um único arquivo `.pdf` com nome no formato `NomeCompleto-RA.pdf`, por exemplo `PierredeFermat-112358.pdf` (sem espaços e/ou acentuação).
5. Caso você tenha algum problema para submeter sua prova pelo "Google Sala de Aula", envie os arquivos escaneados por e-mail para seu professor (dentro do período de realização da prova).
6. **IMPORTANTE:** Na primeira página da sua prova deverá constar a seguinte declaração (manuscrita) e sua assinatura:

   "*Declaro que não estou recebendo ajuda de outras pessoas durante o período de realização da prova, nem faço uso de recursos não permitidos.*
   Comprometo-me a não compartilhar qualquer assunto referente a esta prova por 48h após sua realização."

As questões da prova estão na próxima página.

Q1. Calcule os limites abaixo de forma detalhada e sem usar o Teorema de L'Hospital:

(a) **(1 ponto)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x^5-3x^2+2x+1}{x^5-x^3+x+2}$

(b) **(1 ponto)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2(3x)}$

(c) **(1 ponto)** $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^4-4x^3+2x^2+x+6}$

Solução:

(a) Note que

$$\frac{4x^5-3x^2+2x+1}{x^5-x^3+x+2}=\frac{x^5(4-3/x^3+2/x^4+1/x^5)}{x^5(1-1/x^2+1/x^4+2/x^5)}=\frac{4-3/x^3+2/x^4+1/x^5}{1-1/x^2+1/x^4+2/x^5},\ \text{(0,5 ponto)}$$

desde que $x\neq 0$. Como $x\to\infty$, teremos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^5-3x^2+2x+1}{x^5-x^3+x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-3/x^3+2/x^4+1/x^5}{1-1/x^2+1/x^4+2/x^5}=4.\ \text{(0,5 ponto)}$$

(b) Note que

$$\frac{\operatorname{sen}^2(3x)}{x^2}=\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}.$$

Como $-1\leq \operatorname{sen}(3x)\leq 1$, segue que $-\dfrac{1}{x}\leq\dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x}\leq\dfrac{1}{x}$ (0,5 ponto) e portanto

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}=0.$$

Logo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen}^2(3x)}{x^2}=0$$

e assim

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2(3x)}=\infty.\ \text{(0,5 ponto)}$$

(c) Note que

$$x^2-4=(x-2)(x+2)$$

e

$$x^4-4x^3+2x^2+x+6=(x-2)(x-3)(x^2+x+1),$$

portanto para $x\neq 2$ temos

$$\frac{x^2-4}{x^4-4x^3+2x^2+x+6}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)(x^2+x+1)}=\frac{x+2}{(x-3)(x^2+x+1)}.\ \text{(0,5 ponto)}$$

Fazendo $x\to 2$ na última expressão temos

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^4-4x^3+2x^2+x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{(x-3)(x^2+x+1)}=-\frac{4}{7}.\ \text{(0,5 ponto)}$$

Q2. (a) **(1 ponto)** Calcule $h'(x)$, onde $h(x) = e^{\cos(x^2)} + e^{1/x}$.

(b) **(1 ponto)** Obtenha a equação da reta tangente à curva dada por $yx^3 + xy^2 + 2xy + y + x^4 = 1$ no ponto $(1, -4)$.

Solução:

(a) Precisamos usar a regra da cadeia e o fato da derivada da soma ser a soma das derivadas, caso ambas existam. (0,5 ponto)

Assim
$$h'(x) = -2xe^{\cos(x^2)}\text{sen}(x^2) - \frac{e^{1/x}}{x^2}. \text{ (0,5 ponto)}$$

(b) Derivando
$$yx^3 + xy^2 + 2xy + y + x^4 = 1$$
implicitamente com respeito a x, temos
$$x^3\frac{dy}{dx} + 4x^3 + 3x^2y + 2xy\frac{dy}{dx} + 2x\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} + y^2 + 2y = 0.$$
Isolando dy/dx temos
$$\left(x^3 + 2xy + 2x + 1\right)\frac{dy}{dx} + 4x^3 + 3x^2y + y^2 + 2y = 0$$
e portanto
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x^3 + 3x^2y + y^2 + 2y}{x^3 + 2xy + 2x + 1}. \text{ (0,5 ponto)}$$
Para $x = 1$ e $y = -4$ temos
$$\frac{dy}{dx} = 0.$$
Portanto a reta procurada é $y = -4$. (0,5 ponto)

Q3. Calcule as integrais abaixo:

(a) **(1 ponto)** $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$

(b) **(1 ponto)** $\displaystyle\int \sqrt{9-x^2}\,dx$

(c) **(1 ponto)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-7x+6}$

Solução:

(a) Vamos fazer a mudança de variáveis $u = 1-x^2$. O limite de integração deverá ser trocado de $[0,1]$ para $[1,0]$. Note que $du = -2x\,dx$ e $-du/2 = x\,dx$ (0,5 ponto), ou seja,

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_1^0 u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.\ \text{(0,5 ponto)}$$

(b) Podemos fazer a mudança de variáveis $x = 3\text{sen}(t)$. Assim $dx = 3\cos(t)\,dt$ (0,5 ponto) e a integral fica

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \int \sqrt{9-9\text{sen}^2(t)}\cdot 3\cos(t)\,dt = 9\int \cos^2(t)\,dt$$

Lembrando que

$$\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$$

temos então

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = 9\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\text{sen}(2t)\right)+c$$

o que implica em

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\cos(t)\text{sen}(t)\right)+c.$$

Como $\text{sen}(t) = x/3$, segue que $\cos(t) = \sqrt{9-x^2}/3$ e $t = \text{arcsen}(x/3)$; portanto

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\text{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right)+c\ \text{(0,5 ponto)}$$

(c) Como $x^2-7x+6 = (x-1)(x-6)$, a decomposição em frações parciais do integrando fica

$$\frac{1}{x^2-7x+6} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-6},$$

para certos valores de A, B. Podemos determinar os valores de A, B resolvendo um sistema linear, e iremos obter

$$\frac{1}{x^2-7x+6} = \frac{1}{5(x-6)}-\frac{1}{5(x-1)}.\ \text{(0,5 ponto)}$$

Assim,

$$\int \frac{1}{x^2-7x+6}\,dx = \int\left(\frac{1}{5(x-6)}-\frac{1}{5(x-1)}\right)dx = \frac{1}{5}\left(\ln|x-6|-\ln|x-1|\right)+c.$$

(0,5 ponto)

Q4. Seja R a região limitada pelos gráficos de $y = 2x - x^3$ e $y = x$ para $x \in [0, 1]$ e S o sólido obtido pela revolução desta área em torno do eixo y.

(a) **(1 ponto)** Calcule a área de R.

(b) **(1 ponto)** Calcule o volume de S.

Solução:

(a) Note que para $x \in [0, 1]$, o gráfico de $y = 2x - x^3$ está sempre acima do gráfico de $y = x$. (0,5 ponto)

Portanto podemos calcular a área da região pela integral

$$\int_0^1 \big((2x - x^3) - (x)\big)\, dx = \int_0^1 (x - x^3)\, dx = \frac{1}{4}. \text{ (0,5 ponto)}$$

(b) O volume do sólido obtido pela revolução em torno do eixo y pode ser calculado pelo método das cascas cilíndricas. Seja $f(x) = 2x - x^3$ e $g(x) = x$. Então o volume é dado por

$$V = \int_0^1 2\pi x\,(f(x) - g(x))\, dx \text{ (0,5 ponto)} = \int_0^1 2\pi x\left(x - x^3\right)\, dx = \frac{4\pi}{15}. \text{ (0,5 ponto)}$$