IMECC/Unicamp
MA111 - Cálculo I
Exame final
19 de julho - 2a feira - noite

RA: ____________ **Nome: GABARITO**

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	3	2	3	2	10
Nota:					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

1. Essa prova terá início às 18h30 do dia 19 de julho de 2021. Você terá duas horas para resolvê-la e mais 30 minutos para preparar um arquivo com sua resolução e enviar através do "Google Sala de Aula".
2. Você deverá escrever a **resolução detalhada** das questões em folhas de papel sulfite branca. Respostas não acompanhadas de argumentos que as confirmem não serão consideradas.
3. Você deverá colocar seu nome, RA e sua assinatura em todas as folhas e numerar as páginas no formato {`página atual`}/{`total de páginas`}. Uma nova questão sempre deve ser iniciada numa página nova, isto é, nenhuma página deve ter partes de mais do que uma questão.
4. A digitalização da prova deve estar suficientemente legível e entregue preferencialmente como um único arquivo `.pdf` com nome no formato `NomeCompleto-RA.pdf`, por exemplo `PierredeFermat-112358.pdf` (sem espaços e/ou acentuação).
5. Caso você tenha algum problema para submeter sua prova pelo "Google Sala de Aula", envie os arquivos escaneados por e-mail para seu professor (dentro do período de realização da prova).
6. **IMPORTANTE:** Na primeira página da sua prova deverá constar a seguinte declaração (manuscrita) e sua assinatura:

   "*Declaro que não estou recebendo ajuda de outras pessoas durante o período de realização da prova, nem faço uso de recursos não permitidos.*
   Comprometo-me a não compartilhar qualquer assunto referente a esta prova por 48h após sua realização."

As questões da prova estão na próxima página.

Q1. Calcule os limites abaixo de forma detalhada e sem usar o Teorema de L'Hospital:

(a) **(1 ponto)** $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{1+3x^5}{x-3}}$

(b) **(1 ponto)** $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}(1/x)$

(c) **(1 ponto)** $\lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$

Solução:

(a) A função que está dentro da raiz é uma função racional com o grau do numerador maior que o grau do denominador. Como ambos os polinômios são de grau ímpar, quando $x \to -\infty$, ambos tendem a $-\infty$, portanto a função racional tenderá a $+\infty$. (0,5 ponto) Como a função $x \mapsto \sqrt{x}$ é contínua para $x > 0$, segue que

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{1+3x^5}{x-3}} = +\infty. \text{ (0,5 ponto)}$$

(b) Como a função $\operatorname{sen}(x)$ é limitada, segue que $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$. Portanto,

$$-x \leq x \operatorname{sen}(x) \leq x. \text{ (0,5 ponto)}$$

Quando $x \to 0$, pelo Teorema do Sanduíche, teremos

$$0 \leq \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}(1/x) \leq 0,$$

logo

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}(1/x) = 0. \text{ (0,5 ponto)}$$

(c) Note que $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, portanto para $x \neq 2$ temos

$$\frac{x-2}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-1}. \text{ (0,5 ponto)}$$

Portanto

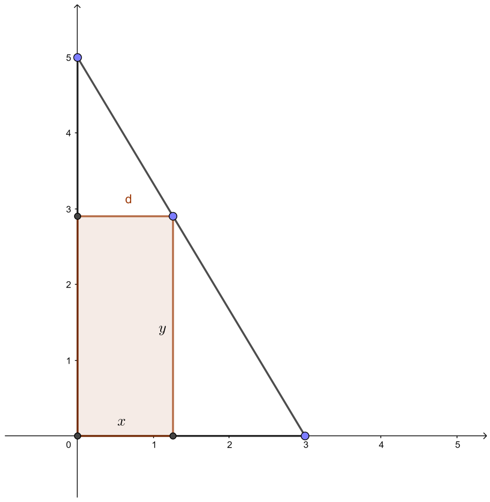
$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-1} = 1. \text{ (0,5 ponto)}$$

Q2. (a) **(1 ponto)** Encontre as dimensões do cilindro circular reto de maior volume que pode ser inscrito num cone circular reto com raio de 3 m e de altura 5 m.

(b) **(1 ponto)** Seja $f(x) = \int_0^{2x^2+2} e^{t^2}\, dt$. Calcule $f'(0)$.

Solução:

(a) Para facilitar a modelagem do problema, considere a projeção bidimensional, como indicado na figura a seguir:



O volume do cilindro (projeção cor laranja) é calculado por $V = \pi x^2 y$ (sua base é um círculo de raio x e ele tem altura y. Na projeção, o ponto (x, y) está sobre a reta $5x + 3y = 15$, portanto temos o vínculo $y = 5(3 - x)/3$. Substituindo na fórmula de V, obtemos

$$V = -\frac{5\pi}{3}(x-3)x^2, \text{ (0,5 ponto)}$$

com $x \in [0, 3]$.

Derivando em x, obtemos

$$V'(x) = 5\pi(2-x)x,$$

e portanto $V'(x) = 0$ para $x \in \{0, 2\}$.

Note que para $x = 0$ temos $V = 0$ e para $x = 2$ temos $V = 20\pi/3$, que é o volume máximo. Para confirmar, basta conferirmos que $V''(2) = -10\pi$, portanto pelo teste da derivada 2a, o ponto é de fato de máximo.

Assim o cilindro deverá ter raio da base de 2 e altura 5/3. (0,5 ponto)

(b) Seja $g(x) = 2x^2 + 2$ e $p(t) = e^{t^2}$. Então

$$f(x) = \int_0^{g(x)} p(t)\, dt.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo (0,5 ponto), temos que

$$f'(x) = p(g(x))g'(x),$$

logo

$$f'(x) = 4x\, e^{(2x^2+2)^2}$$

e daí $f'(0) = 0$. (0,5 ponto)

Q3. Calcule as integrais abaixo:

(a) **(1 ponto)** $\int \sqrt{9+t^2}\,dt$

(b) **(1 ponto)** $\int e^{2x}\cos(x)\,dx$

(c) **(1 ponto)** $\int \tan^9(x)\sec^4(x)\,dt$

Solução:

(a) Lembrando da identidade trigonométrica $\cos^2(x)+\text{sen}^2(x)=1$ podemos deduzir que $1+\tan^2(x)=\sec^2(x)$ (desde que $\cos(x)\neq 0$). Fazendo a mudança de variáveis $t=3\tan(x)$ (0,5 ponto), temos que $dt=3\sec^2(x)\,dx$, portanto a integral se transforma em

$$\int \sqrt{9+t^2}\,dt = 3\int \sec^3(x)\,dx. \text{ (0,3 ponto)}$$

A integral de $\sec^3(x)$ pode ser calculada usando integração por partes (duas vezes!) e obtemos

$$\int \sqrt{9+t^2}\,dt = \frac{1}{2}t\sqrt{t^2+9}+\frac{9}{2}\text{arcsenh}\left(\frac{t}{3}\right)+c,$$

onde $\text{arcsenh}(u)$ é a função inversa do seno hiperbólico e aparece quando vamos retornar da variável x para a t. (0,2 ponto)

(b) O integrando é formado por funções com integração "cíclica", então a melhor estratégia é usar integração por partes, só que teremos que fazer isto duas vezes. (0,5 ponto) A escolha de "u" e "dv" pode ser arbitrária, e o resultado será

$$\int e^{2x}\cos(x)\,dx = \frac{1}{5}e^{2x}(\sin(x)+2\cos(x))+c. \text{ (0,5 ponto)}$$

(c) Podemos reescrever o integrando como

$$\tan^9(x)\sec^4(x) = \tan^9(x)\sec^2(x)\sec^2(x) = \tan^9(x)(1+\tan^2(x))\sec^2(x)$$

e fazer a mudança de coordenadas $u=\tan(x)$ (0,5 ponto). Assim $du=\sec^2(x)\,dx$ e daí ficamos com

$$\int \tan^9(x)\sec^4(x)\,dt = \int u^9(1+u^2)\,du = \frac{u^{12}}{12}+\frac{u^{10}}{10}+c = \frac{\tan^{12}(x)}{12}+\frac{\tan^{10}(x)}{10}+c \text{ (0,5 ponto)}$$

Q4. **(2 pontos)** Seja R a região limitada pelo eixo x e pelo gráfico de $y = 1 - 4x^2$, com $x \in [-1/2, 1/2]$. Seja S o sólido obtido ao girarmos R em torno do eixo x. Encontre a área de R e o volume de S.

Solução:

A área A da região R pode ser calculada com a integral

$$A = \int_{-1/2}^{1/2} (1 - 4x^2)\, dx = \frac{2}{3}. \text{ (1 ponto)}$$

O volume V do sólido S pode ser obtido usando o "método dos discos". Neste caso, a área da seção transversal é $A(x) = \pi(1 - 4x^2)^2$ e o volume fica

$$V = \int_{-1/2}^{1/2} \pi(1 - 4x^2)^2\, dx = \frac{8\pi}{15}. \text{ (1 ponto)}$$