IMECC/Unicamp
MA111 - Cálculo I
Prova 1
22/04 - 5a feira - noturno

RA: ____________ **Nome:** ____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	2	3	3	2	10
Nota:					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

1. Essa prova terá início às 18h30 do dia 22/04 . Você terá duas horas para resolvê-la e mais 30 minutos para preparar um arquivo com sua resolução e enviar através do formulário "**Entrega da Prova 1**" em sua turma no Google Classroom.

2. Você deverá escrever a resolução das questões em folhas de papel sulfite branca. Respostas não acompanhadas de argumentos que as confirmem não serão consideradas.

3. Você deverá colocar seu nome, RA e sua assinatura em todas as folhas e numerar as páginas no formato `{página atual}/{total de páginas}`. Uma nova questão sempre deve ser iniciada numa página nova, isto é, nenhuma página deve ter partes de mais do que uma questão.

4. A digitalização da prova deve estar suficientemente legível e entregue preferencialmente como um único arquivo `.pdf` com nome no formato `NomeCompleto-RA.pdf`, por exemplo `IsaacNewton-123456.pdf` (sem espaços e acentuação).

5. Caso você tenha algum problema para submeter sua prova pelo Google Classroom, envie os arquivos escaneados por e-mail para seu professor (dentro do período de realização da prova).

6. **IMPORTANTE:** Na primeira página da sua prova deverá constar a seguinte declaração (manuscrita) e sua assinatura:

   "*Declaro que não estou recebendo ajuda de outras pessoas durante o período de realização da prova, nem faço uso de recursos não permitidos. Comprometo-me a não compartilhar qualquer assunto referente a esta prova por 48h após sua realização.*"

As questões da prova estão na próxima página.

Q1. **(2 pontos)** Determine todos os valores de x tais que

$$\left|\frac{3x+15}{5x-10}\right| < 2$$

Solução: A equação

$$\left|\frac{3x+15}{5x-10}\right| < 2$$

é equivalente a

$$-2 < \frac{3x+15}{5x-10} < 2$$

e está definida para $x \neq 2$.

Vamos multiplicar todas as inequações por $5x - 10$. Note que isso irá alterar o sinal das desigualdades caso $x < 2$ e irá manter o sinal caso $x > 2$. Temos então dois casos.

Se $x > 2$ ficamos com

$$-2(5x-10) < 3x + 15 < 2(5x-10)$$

ou

$$-10x + 20 < 3x + 15 \textbf{ e } 3x + 15 < 10x - 20$$

que tem como solução $x \in (2, \infty) \cap (5/13, \infty) \cap (5, \infty) = (5, \infty)$.

Já se $x < 2$ ficamos com

$$-2(5x-10) > 3x + 15 > 2(5x-10)$$

ou

$$-2(5x-10) > 3x + 15 \textbf{ e } 3x + 15 > 2(5x-10),$$

que tem como solução $x \in (-\infty, 2) \cap (-\infty, 5/13) \cap (-\infty, 5) = (-\infty, 5/13)$.

Portanto a solução da equação é o conjunto

$$(-\infty, 5/13) \cup (5, \infty) = \{x \in \mathbb{R},\ x < 5/13 \text{ ou } x > 5\}.$$

Q2. (3 pontos) Discuta de modo argumentativo a existência ou inexistência de cada um dos limites abaixo, determinando-o quando este existir:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^4}{x^{11}+1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(7x)}{\operatorname{sen}(2x)}$

Solução:

(a) Note que quando x se aproxima de -1, independente se por valores maiores ou menores que -1, o numerador de

$$\frac{x^4}{x^{11}+1}$$

se aproxima de 1.

Já o denominador se aproxima de 0 por valores negativos quando x se aproxima de -1 por valores inferiores , e se aproxima de 0 por valores positivos quando x se aproxima de 1 por valores superiores , ou seja:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^4}{x^{11}+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{\cancelto{1}{x^4}}{\cancelto{0^-}{x^{11}+1}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^4}{x^{11}+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\cancelto{1}{x^4}}{\cancelto{0^+}{x^{11}+1}} = +\infty$$

Portanto, o limite não existe (limites laterais distintos).

(b) Lembre que, como $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} = 1$, é também verdade que $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{z}{\operatorname{sen}(z)} = 1$.

Assim:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(7x)}{\operatorname{sen}(2x)} &= \lim_{x\to 0} \cancelto{1}{\frac{\operatorname{sen}(7x)}{7x}} \cdot \cancelto{1}{\frac{1}{\cos(7x)}} \cdot \cancelto{1}{\frac{2x}{\operatorname{sen}(2x)}} \cdot \frac{7}{2} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{2}.\end{aligned}$$

Q3. **(3 pontos)** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x+2}{2x-1} & \text{, se} \quad x \geq 2, \\ 10 - 3x & \text{, se} \quad x < 2. \end{cases}$$

(a) A função f é contínua em $x = 2$? Justifique sua resposta.

(b) Encontre a assíntota **horizontal** de f quando $x \to \infty$. Existe assíntota vertical em algum ponto?

Solução:

(a) A função está definida por partes, sendo uma expressão para $x \geq 2$ e outra para $x < 2$. Para que seja contínua em $x = 2$, deve acontecer $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$, ou seja,

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4.$$

Então devemos estudar se o limite $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe e é igual a 4.
Faremos isso calculando limites laterais.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (10 - 3x) = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{5x+2}{2x-1} = 4$$

Como os limites laterais existem e são ambos iguais a 4, o limite $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe e vale 4. Portanto temos

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

e a função é contínua em $x = 2$.

(b) A assíntota horizontal de $f(x)$ quando $x \to +\infty$ pode ser encontrada calculando o limite

$$\lim_{x\to +\infty} f(x).$$

Caso esse limite exista e seja igual a L, a reta $y = L$ será uma assíntota horizontal.

Para calcular $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ usaremos a expressão de $f(x)$ que está definida para $x \geq 2$ (já que $x \to \infty$). Assim:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{5x+2}{2x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x}(5 + \cancelto{0}{2/x})}{\cancel{x}(2 - \cancelto{0}{1/x})} = \frac{5}{2}.$$

Logo, a assíntota horizontal quando $x \to +\infty$ é $y = 5/2$.

Sobre as assíntotas verticais, os candidatos naturais são os pontos onde a função não tem limite.

Na expressão que define a função para $x < 2$ isso não acontece, pois é um polinômio.

Já na expressão que define a função para $x \geq 2$, temos um problema de definição no ponto $x = 1/2$, que anula o denominador da expressão $\frac{5x+2}{2x-1}$; no entanto, como essa expressão da função só vale quando $x > 2$, podemos descartar esse ponto.

Portanto, não existe assíntota vertical.

Q4. (2 pontos) Use o Teorema do Valor Intermediário (TVI) para mostrar que a equação

$$2\cos(x) = 4x - 1$$

tem uma solução no intervalo $(0, \frac{\pi}{4})$.

Solução: Encontrar uma solução da equação

$$2\cos(x) = 4x - 1$$

no intervalo $(0, \frac{\pi}{4})$ é equivalente a encontrar um ponto $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$ tal que $f(x_0) = 0$, onde

$$f(x) = 2\cos(x) + 1 - 4x.$$

Para usarmos o Teorema do Valor Intermediário como o enunciado indica, devemos verificar se a função é contínua no intervalo fechado $[0, \frac{\pi}{4}]$: isso de fato acontece, pois a função é soma da função trigonométrica $\cos(x)$ com um polinômio.

Resta-nos agora encontrar valores $a, b \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tais que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais contrários. Assim, o TVI garantirá que existe $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$ tal que $f(x_0) = 0$, como queremos.

Note que

$$f(0) = 2 + 1 = 3 > 0$$

$$f(\pi/4) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - 4\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} + 1 - \pi$$

Ora, como $\sqrt{2} < 2$, temos que $\sqrt{2} + 1 < 3$. Logo, $\sqrt{2} + 1 - \pi < 3 - \pi < 0$. Assim, $f(\pi/4) < 0$.

Segue então, do TVI, que existe solução para $f(x) = 0$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$, como queríamos demonstrar.