IMECC/Unicamp
MA111 - Cálculo I
Prova 1
13/04/2023 - 5a feira - noite

RA: ____________ **Nome:** ____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	**Q5**	Total:
Valor:	2	2	2	2	2	10
Nota:						

Instruções para realização e entrega de sua prova:

1. Essa prova terá 1h40 de duração.
2. Coloque seu nome e RA em todas as páginas.
3. Não faça uso de telefone celular ou outro recurso eletrônico durante a prova.
4. Não divulgue as questões desta prova por pelo menos 2 dias.
5. Ao entregar a prova, você atesta que não utilizou nenhum meio fraudulento para realizá-la.

As questões da prova começam na próxima página. Esta prova tem 5 questões.

Q1. **(2 pontos)** Determine todos os valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem

$$|x + 6| < x - 1.$$

Ilustre o conjunto-solução na reta real.

Solução:
Se $x + 6 \geq 0$ temos a equação

$$x + 6 < x - 1,$$

que não tem solução.
Se $x + 6 < 0$ temos a equação

$$-x - 6 < x - 1,$$

cuja solução é $-5 < 2x$, ou $x > -5/2$. Como precisamos ter $x < -6$, não existe solução.
Logo, o conjunto solução é vazio.

Sugestão de grade

- Verificar no caso $x + 6 \geq 0$: 0,8
- Verificar no caso $x + 6 < 0$: 0,8
- Concluir corretamente que não existe solução: 0,4

Q2. **(2 pontos)** Avalie os limites abaixo e encontre o valor correspondente no caso dos que existem. Não use a regra de L'Hospital. Sua resposta precisa ser justificada.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + x^3 - x}{x^4 + x^3 - x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 4x - 4}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

Solução:

(a) **(0,8 pontos)** Temos que

$$\frac{x^5 + x^3 - x}{x^4 + x^3 - x} = \frac{\cancelto{x}{x^5}(1 + 1/x^2 - 1/x^4)}{\cancel{x^4}(1 + 1/x^2 - 1/x^4)}$$

Logo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + x^3 - x}{x^4 + x^3 - x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1 + \cancelto{0}{1/x^2} - \cancelto{0}{1/x^4})}{1 + \cancelto{0}{1/x^2} - \cancelto{0}{1/x^4}} = \infty.$$

(b) **(0,6 pontos)** Note que $x = -1$ anula tanto o numerador quanto o denominador. Efetuando a divisão do polinômio $x^3 + x^2 - 4x - 4$ pelo polinômio $x + 1$ obtemos $x^2 - 4$. Portanto

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 4x - 4} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{x^2 - 4} = -\frac{1}{3}.$$

(c) **(0,6 pontos)** Note que $x = 1$ anula tanto o numerador quanto o denominador, e que $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$. Portanto

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} (x^2 + x + 1) = 3.$$

Q3. (2 pontos) Seja $k \in \mathbb{R}$ e considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ k - x^2, & x > 0. \end{cases}$$

(a) Determine um valor de k para o qual a função $f(x)$ seja contínua.

(b) Para o valor de k encontrado em (a), existe o limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$?

Solução:

(a) **(1,4 pontos)** Para $x \neq 0$, a função é contínua. Em $x = 0$, temos:

- $f(0) = 1$
- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x + 1) = 1$
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (k - x^2) = k$

Logo, a função será contínua se, e só se, $k = 1$.

Sugestão de grade de correção:

- 0,2 pelo cálculo de $f(0)$
- 0,4 por cada limite lateral
- 0,4 pela conclusão

(b) **(0,6 pontos)** Para $k = 1$ temos

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ 1 - x^2, & x > 0. \end{cases}$$

Temos:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{(x+1) - 1}{x - 0} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(1 - x^2) - 1}{x - 0} = 0$$

Portanto, o limite não existe.

Sugestão de grade de correção:

- 0,3 para cada limite calculado corretamente

Q4. (2 pontos) Considere a função

$$h(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4}.$$

(a) Determine as assíntotas de $y = h(x)$ (lembre-se de considerar os limites laterais e os casos $x \to \infty$ e $x \to -\infty$).

(b) Existe algum x_0 tal que $h(x_0) = 1$?

Solução:

(a) **(1,5 pontos)** Os candidatos a assíntota vertical são as retas $x = 2$ e $x = -2$. Temos:

- $\lim_{x\to\infty} h(x) = 1$
- $\lim_{x\to-\infty} h(x) = 1$
- $\lim_{x\to 2^-} h(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to 2^+} h(x) = \infty$
- $\lim_{x\to -2^-} h(x) = -\dfrac{1}{4}$
- $\lim_{x\to -2^+} h(x) = -\dfrac{1}{4}$

logo $y = 1$ é uma assíntota horizontal e $x = 2$ é uma assíntota vertical. Note que $x = -2$ não é assíntota vertical.

Sugestão de grade de correção:

- 0,5 por cada par de limite ($\pm\infty$, $2^{\pm}$, $-2^{p}m$) + conclusão correta

(b) **(0,5 pontos)** Se x_0 é tal que $h(x_0) = 1$, então $x_0 \neq -2$ e $x_0 \neq 2$, pois a função h não está definida nestes pontos. Por outro lado, se tentarmos resolver $h(x_0) = 1$ chegaremos em $x^2 + 5x + 6 = x^2 - 4$, ou seja, $x = -2$, que não é uma solução válida. Logo, não existe x_0 com $h(x_0) = 1$.

Q5. **(2 pontos)** Considere as funções $p(x) = e^x + 2x$ e $q(x) = x^2 + 3$. Mostre que existe uma solução para a equação $p(x) = q(x)$ no intervalo $[0, 1]$, e apresente uma estimativa para o valor de x que resolve a equação.

Solução:

Seja $h(x) = p(x) - q(x) = e^x + 2x - x^2 - 3$. Então $p(x) = q(x)$ se, e só se, $h(x) = 0$.

Temos que

- $h(0) = -2 < 0$
- $h(1) = -2 + e > 0$

Portanto, pelo Teorema de Bolzano, como a função é contínua e $h(0)h(1) < 0$, existe $a \in (0, 1)$ tal que $p(a) = q(a)$.

Note que $h(1/2) = -9/4 + \sqrt{e}$. Como $e < 2$, $\sqrt{e} < 2$, e $9/4 > 2$. Portanto, $h(1/2) < 0$.

Assim, podemos afirmar que existe $b = 0,5\ldots$ tal que $p(b) = q(b)$.

Sugestão de grade

- 1,8 concluir a existência da raiz com base no Teorema de Bolzano.
- 0,2 conseguir uma "boa" aproximação da raiz
- Descontar 0,5 na nota final se não mencionar o Teorema de Bolzano ou algo equivalente, junto com continuidade, etc.

Rascunho/folha extra