IMECC/Unicamp
MA111 - Cálculo I
Prova 1
13/04/2023 - 5a feira - tarde

RA: ____________ **Nome:** ____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	**Q5**	Total:
Valor:	2	2	2	2	2	10
Nota:						

Instruções para realização e entrega de sua prova:

1. Essa prova terá 1h40 de duração.
2. Coloque seu nome e RA em todas as páginas.
3. Não faça uso de telefone celular ou outro recurso eletrônico durante a prova.
4. Não divulgue as questões desta prova por pelo menos 2 dias.
5. Ao entregar a prova, você atesta que não utilizou nenhum meio fraudulento para realizá-la.

As questões da prova começam na próxima página. Esta prova tem 5 questões.

Q1. (2 pontos) Determine todos os valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem

$$\left|\frac{x-5}{x+2}\right| < 2.$$

Ilustre o conjunto-solução na reta real.

Solução:

A inequação modular é equivalente a

$$-2 < \frac{x-5}{x+2} < 2, \ x \neq -2.$$

Resolvendo a primeira delas:

- se $x > -2$ então
$$-2 < \frac{x-5}{x+2}$$
é equivalente a
$$-2x - 4 < x - 5,$$
o que resulta em $x > 1/3$. Logo, $x \in (1/3, \infty) \cap (-2, \infty) = (1/3, \infty)$.

- se $x < -2$ então
$$-2 < \frac{x-5}{x+2}$$
é equivalente a
$$-2(x+2) > x - 5,$$
que por sua vez resulta em $x < 1/3$. Logo $x \in (-\infty, 1/3) \cap (-\infty, -2) = (-\infty, -2)$.

Assim, a primeira desigualdade resulta na solução $x \in (-\infty, -2) \cup (1/3, \infty)$.

Resolvendo a segunda:

$$\frac{x-5}{x+2} < 2.$$

- se $x > -2$ então
$$\frac{x-5}{x+2} < 2$$
é equivalente a
$$x - 5 < 2x + 4,$$
o que resulta em $x > -9$. Logo, $x \in (-9, \infty) \cap (-2, \infty) = (-2, \infty)$.

- se $x < -2$ então
$$\frac{x-5}{x+2} < 2$$
é equivalente a
$$x - 5 > 2x + 4,$$
que por sua vez resulta em $x < -9$. Logo $x \in (-\infty, -9) \cap (-\infty, -2) = (-\infty, -9)$.

Assim, a primeira desigualdade resulta na solução $x \in (-2, \infty) \cup (-\infty, -9)$.

Para obtermos a solução, basta calcular a interseção da solução da primeira inequação com a solução da segunda. Assim, os valores de x que satisfazem à condição estão no intervalo

$$\big((-\infty, -2) \cup (1/3, \infty)\big) \cap \big((-2, \infty) \cup (-\infty, -9)\big),$$

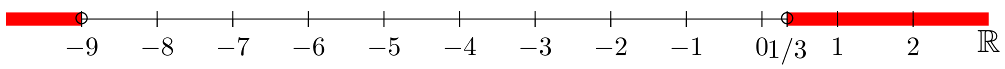
ou seja,

$$x \in (-\infty, -9) \cup (1/3, \infty),$$

o que em notação de conjunto dá

$$S = \{x \in \mathbb{R},\ x < -9 \text{ ou } x > 1/3\}.$$

O conjunto solução pode ser ilustrado como na figura a seguir:



Grade de correção:

- desmembrar em duas desigualdades ou passo equivalente: 0,5
- obter $x < -9$ por métodos corretos: 0,5
- obter $x > 1/3$ por métodos corretos: 0,5
- esboço da reta: 0,5
- descontar 0,2 em caso de erro (não acumular erros)

Q2. (2 pontos) Avalie os limites abaixo e encontre o valor correspondente no caso dos que existem. Não use a regra de L'Hospital. Sua resposta precisa ser justificada.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x-1}{x^2+7}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-9x+18}{x-2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}$

Solução:

Instruções gerais para correção:

- descontar 0,1 em caso de não escrever $\lim_{x\to *}$, só ficar usando $=$.
- descontar 0,2 em caso de erro (não acumular erros).
- usar L'Hopital ou métodos muito mais elaborados: desconsiderar o item.

(a) **(0,6 pontos)** Temos que, para $x \neq 0$,

$$\frac{x^3+2x-1}{x^2+7} = \frac{x^2(x+2/x-1/x^2)}{x^2(1+7/x^2)} = \frac{x+2/x-1/x^2}{1+7/x^2}$$

Calculando o limite de $x\to\infty$ na última expressão anterior, teremos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cancelto{\infty}{x} + \cancelto{0}{2/x} - \cancelto{0}{1/x^2}}{1+\cancelto{0}{7/x^2}} = \infty$$

(b) **(0,8 pontos)** Note que

$$x^3-2x^2-9x+18 = (x-2)(x^2-9).$$

Existem várias formas de perceber isso: a mais simples delas é perceber que, como $x=2$ anula o numerador, então o polinômio precisa ser divisível por $x-2$. Efetuando a divisão, chegamos na expressão acima.

Portanto, ao calcularmos o limite com $x\to 2$, lembrando que $x\neq 2$, temos

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-9x+18}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2-9)}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2}(x^2-9) = -5.$$

(c) **(0,6 pontos)** Note que, para $x\neq 5$, temos

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}} = \frac{\cancel{x-5}}{\cancel{(x-5)}(\sqrt{x}+\sqrt{5})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}$$

Portanto

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5} = \lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Q3. (2 pontos) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + b, & x \leq -1, \\ x + 3, & -1 < x \leq 0, \\ \dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

Determine valores de a, b para que a função $y = f(x)$ seja contínua.

Solução:

Note que, com exceção de $x = -1$ e $x = 0$, a função é contínua nos demais pontos, pois sua expressão é composta de polinômios, funções trigonométricas ou operações básicas com estas.

Note ainda que a função está definida em $x = -1$ e $x = 0$, então ela tem a possibilidade de ser contínua.

Para determinar a, b para que a função seja contínua, vamos calcular os limites laterais e comparar com os valores da função nos pontos.

Em $x = -1$:

- $f(-1) = (-1)^2 + b = 1 + b$
- $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 + b) = 1 + b$
- $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x + 3) = 2$

  Portanto, o limite existirá, e a função será contínua em $x = -1$ se, e só se, $1 + b = 2$, ou seja, $b = 1$.

Em $x = 0$:

- $f(0) = 0 + 3 = 3$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x + 3) = 3$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{ax} \cdot a = a$

  Portanto, o limite existirá, e a função será contínua em $x = 0$ se, e só se, $a = 3$.

Assim, $a = 3$ e $b = 1$ torna a função contínua.

Instruções gerais para correção:

- encontrar corretamente o valor de a: 1,0 ponto
- encontrar corretamente o valor de b: 1,0 ponto
- erro de conta: descontar 0,2 (não acumular erros)

Q4. (2 pontos) Seja
$$h(x) = \frac{x^2+5x+6}{3x^2-8}.$$

(a) Determine o maior domínio possível $A \subset \mathbb{R}$ para a função $h(x)$.

(b) Determine as assíntotas de $y = h(x)$ (lembre-se de considerar os limites laterais e os casos $x \to \infty$ e $x \to -\infty$).

Solução:

(a) A função $h(x)$ é uma função racional, então os "problemas" do domínio estão relacionados às raízes do denominador. Como $3x^2-8=0$ se, e só se, $x = \pm 2\sqrt{2/3}$, o maior domínio de $h(x)$ é
$$A = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq \pm 2\sqrt{2/3}\}.$$

(b) Para determinar a assíntotas horizontais, iremos calcular os limites
$$\lim_{x\to\infty} f(x) \text{ e } \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Para calcular as assíntotas verticais, precisaremos calcular os quatro limites
$$\lim_{x\to\pm 2\sqrt{2/3}^-} f(x) \text{ e } \lim_{x\to\pm 2\sqrt{2/3}^+} f(x).$$

Como um teste para verificar se existem assíntotas inclinadas, precisaremos calcular também limites
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x.$$

assíntotas horizontais

- $\displaystyle \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5x+6}{3x^2-8} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}(1+\cancelto{0}{5/x}+\cancelto{0}{6/x^2})}{\cancel{x^2}(3-\cancelto{0}{8/x^2})} = \frac{1}{3}$
- $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+5x+6}{3x^2-8} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}(1+\cancelto{0}{5/x}+\cancelto{0}{6/x^2})}{\cancel{x^2}(3-\cancelto{0}{8/x^2})} = \frac{1}{3}$

Portanto, $y = 1/3$ é uma assíntota horizontal.

assíntotas verticais

- $\displaystyle \lim_{x\to 2\sqrt{2/3}^-} f(x) = \lim_{x\to 2\sqrt{2/3}^-} \frac{\cancelto{2(13+5\sqrt{6})/3}{x^2+5x+6}}{\cancelto{0^-}{3x^2-8}} = -\infty$
- $\displaystyle \lim_{x\to 2\sqrt{2/3}^+} f(x) = \lim_{x\to 2\sqrt{2/3}^+} \frac{\cancelto{2(13+5\sqrt{6})/3}{x^2+5x+6}}{\cancelto{0^+}{3x^2-8}} = \infty$
- $\displaystyle \lim_{x\to -2\sqrt{2/3}^-} f(x) = \lim_{x\to -2\sqrt{2/3}^-} \frac{\cancelto{2(13-5\sqrt{6})/3}{x^2+5x+6}}{\cancelto{0^+}{3x^2-8}} = \infty$

- $$\lim_{x\to -2\sqrt{2/3}^+} f(x) = \lim_{x\to -2\sqrt{2/3}^+} \frac{\overset{2(13-5\sqrt{6})/3}{\cancel{x^2+5x+6}}}{\underset{0^-}{\cancel{3x^2-8}}} = -\infty$$

Portanto, as retas $x = -2\sqrt{2/3}$ e $x = 2\sqrt{2/3}$ são assíntotas verticais.

assíntotas inclinadas

- $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+5x+6}{3x^3-8x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}(1+\overset{0}{\cancel{5/x}}+\overset{0}{\cancel{6/x^2}})}{\cancel{x^2}(3x-\overset{0}{\cancel{8/x}})} = 0.$$

Como o resultado do limite acima foi zero, a única assíntota "inclinada" é a assíntota horizontal que nós já encontramos.

Instruções gerais para correção:

- 0,4 para cada assíntota calculada corretamente
- 0,4 pelo domínio
- desconto de 0,1 por esquecer de calcular $\infty/-\infty$ e/ou num dos limites laterais
- não precisa de desconto por não considerar assíntotas inclinadas.

Q5. (2 pontos) Seja $p(x) = \cos(\pi x) - x^3 + x$. Mostre que a equação $p(x) = 0$ tem pelo menos duas soluções no intervalo $[-1, 2]$, e apresente estimativas para estes valores.

Solução:

Em primeiro lugar, note que a função $p(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$. Então, do Teorema de Bolzano (ou do Teorema do Valor Intermediário), se encontrarmos $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $p(a)p(b) < 0$, então existirá $c \in (a, b)$ tal que $p(c) = 0$.

Vamos testar o valor da função $p(x)$ em alguns valores de x.

- $p(-1) = \cos(-\pi) - (-1)^3 + (-1) = \cos(\pi) + 1 - 1 = -1$
- $p(-1/2) = \cos(-\pi/2) + 1/8 - 1/2 = -3/8$
- $p(0) = \cos(0) - 1 + 1 = 1$
- $p(1/2) = \cos(\pi/2) - 1/8 + 1/2 = 3/8$
- $p(1) = \cos(\pi) - 1 + 1 = -1$
- $p(3/2) = \cos(3\pi/2) - 27/8 + 3/2 = 39/8$
- $p(2) = \cos(2\pi) - 8 + 2 = 1 - 8 + 2 = -5$

Portanto, pelo TVI, existem $c_1 \in (-1/2, 0)$ e $c_2 \in (3/2, 2)$ tais que $f(c_1) = 0$ e $f(c_2) = 0$. Note que $c_1 \approx -0,25 \pm 0,25$ e $c_2 \approx 1,75 \pm 0,25$.

Instruções gerais para correção:

- 0,8 por cada zero encontrado
- 0,2 por cada zero estimado (algum tipo de estimativa)
- descontar 0,5 se não mencionar continuidade, TVI, teorema de Bolzano, etc

Rascunho/folha extra