IMECC/Unicamp
MA111 - Cálculo I
Prova 1
23/04 - 6a feira - manhã

RA: ____________ **Nome:** ____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	2	3	2	3	10
Nota:					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

1. Essa prova terá início às 07h30 do dia 23/04 . Você terá duas horas para resolvê-la e mais 30 minutos para preparar um arquivo com sua resolução e enviar através do formulário "**Entrega da Prova 1**" em sua turma no Google Classroom.

2. Você deverá escrever a resolução das questões em folhas de papel sulfite branca. Respostas não acompanhadas de argumentos que as confirmem não serão consideradas.

3. Você deverá colocar seu nome, RA e sua assinatura em todas as folhas e numerar as páginas no formato `{página atual}/{total de páginas}`. Uma nova questão sempre deve ser iniciada numa página nova, isto é, nenhuma página deve ter partes de mais do que uma questão.

4. A digitalização da prova deve estar suficientemente legível e entregue preferencialmente como um único arquivo `.pdf` com nome no formato `NomeCompleto-RA.pdf`, por exemplo `IsaacNewton-123456.pdf` (sem espaços e acentuação).

5. Caso você tenha algum problema para submeter sua prova pelo Google Classroom, envie os arquivos escaneados por e-mail para seu professor (dentro do período de realização da prova).

6. **IMPORTANTE:** Na primeira página da sua prova deverá constar a seguinte declaração (manuscrita) e sua assinatura:

   "*Declaro que não estou recebendo ajuda de outras pessoas durante o período de realização da prova, nem faço uso de recursos não permitidos. Comprometo-me a não compartilhar qualquer assunto referente a esta prova por 48h após sua realização.*"

As questões da prova estão na próxima página.

Q1. (2 pontos) Sejam $f(x) = |x^2 - x - 2|$ e $g(x) = |x + 1|$.

(a) Determine os valores de x tais que $f(x) > g(x)$.

(b) Faça um esboço do gráfico de $h(x) = f(x) - g(x)$.

Solução:

(a) Como $f(x)$ e $g(x)$ envolvem funções modulares, primeiro vamos escrever o que significa $|x^2 - x - 2| > |x + 1|$ conforme seja o valor de x. Para fazer isso fazer estudar o sinal de cada uma das funções separadamente.

sinal de $f(x)$: Note que $f(x) = |x^2 - x - 2| = |(x + 1)(x - 2)|$, portanto

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)(x-2) & , \quad x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2, \\ -(x+1)(x-2) & , \quad x \in (-1, 2). \end{cases}$$

sinal de $g(x)$: Como $g(x) = |x + 1|$, portanto

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x \geq -1, \\ -x-1 & , \quad x < -1. \end{cases}$$

Note que $f(-1) = g(-1)$ e $f(2) < g(2)$, portanto nem $x = -1$ nem $x = 2$ são soluções.

Assim, vamos estudar quando $f(x) > g(x)$ em cada um dos intervalos: $x < -1$, $-1 < x < 2$ e $x > 2$.

Se $x < -1$: nesse caso, a equação $f(x) > g(x)$ fica

$$(x + 1)(x - 2) > -(x + 1)$$

e, com isso, $x - 2 < -1 \Rightarrow x < 1$. Portanto, a solução é o intervalo $(-\infty, 1) \cap (-\infty, -1) = (-\infty, -1)$.

Se $-1 < x < 2$: nesse caso a equação $f(x) > g(x)$ fica

$$-(x + 1)(x - 2) > x + 1$$

e portanto $-x + 2 > 1$, ou $1 > x$. Assim, a solução é o intervalo $(-1, 1)$.

Se $x > 2$: nesse caso a equação $f(x) > g(x)$ se torna

$$(x + 1)(x - 2) > x + 1,$$

logo $x - 2 > 1$, ou $x > 3$. Portanto, a solução é o intervalo $(3, \infty)$,

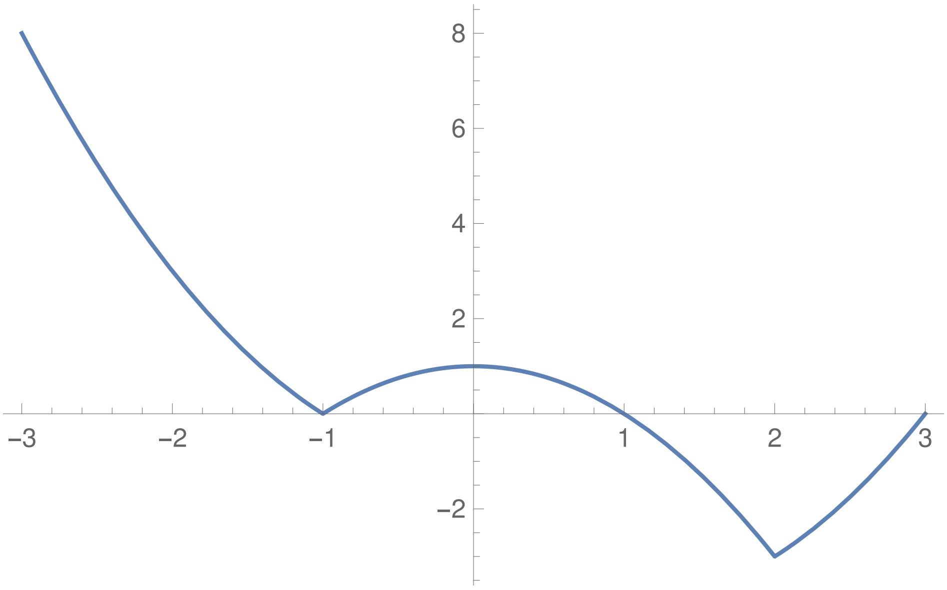
Solução: Unindo os intervalos que obtivemos, a solução é

$$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (3, \infty).$$

(b) Como em (a) já calculamos acima as expressões para $f(x)$ e $g(x)$ em cada um dos intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ e $(2, \infty)$, vamos utilizá-las aqui. Assim,

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \quad x < -1, \\ 1 - x^2 & , \quad -1 \leq x \leq 2, \\ x^2 - 2x - 3 & , \quad x > 2. \end{cases}$$

Como a expressão de $h(x)$ em cada região é um polinômio de grau 2, obtemos o gráfico abaixo:



Q2. (3 pontos) Calcule os limites abaixo:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(2x^4-2021)^5}{(x^2+23)^{10}}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{3\sqrt{x}-6}{x-4}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x)$, sabendo que g é contínua e

$$\frac{5x-1}{x} < g(x) < \frac{5x^2+3x}{x^2-4}, \quad \forall x > 2.$$

Solução:

(a) Note que quando $x \to \infty$, tanto o numerador quanto o denominador da função também tendem para infinito, resultando em uma expressão indeterminada do tipo "∞/∞". Vamos simplificar a expressão da função para tentar resolver essa indeterminação.

$$\frac{(2x^4-2021)^5}{(x^2+23)^{10}} = \frac{\left(x^4\left(2-\frac{2021}{x^4}\right)\right)^5}{\left(x^2\left(1+\frac{23}{x^2}\right)\right)^{10}} = \frac{x^{20}\left(2-\frac{2021}{x^4}\right)^5}{x^{20}\left(1+\frac{23}{x^2}\right)^{10}}$$

$$= \frac{\cancel{x^{20}}\left(2-\frac{2021}{x^4}\right)^5}{\cancel{x^{20}}\left(1+\frac{23}{x^2}\right)^{10}}$$

Portanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x^4-2021)^5}{(x^2+23)^{10}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(2-\frac{2021}{x^4}\right)^5}{\left(1+\frac{23}{x^2}\right)^{10}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(2-\cancelto{0}{\frac{2021}{x^4}}\right)^5}{\left(1+\cancelto{0}{\frac{23}{x^2}}\right)^{10}} = \frac{2^5}{1} = 2^5.$$

(b) Quando x se aproxima de 4, tanto o numerador quanto o denominador da expressão se aproximam de 0, resultando numa indeterminação do tipo "0/0". Vamos simplificar a expressão para tentar entender melhor essa indeterminação.

$$\frac{3\sqrt{x}-6}{x-4} = \frac{(3\sqrt{x}-6)}{(x-4)} \cdot \frac{(3\sqrt{x}+6)}{(3\sqrt{x}+6)} = \frac{9x-36}{x-4} \cdot \frac{1}{(3\sqrt{x}+6)} = \frac{9(x-4)}{x-4} \cdot \frac{1}{(3\sqrt{x}+6)}$$

Portanto, se $x \neq 4$, temos

$$\frac{3\sqrt{x}-6}{x-4} = \frac{9\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}} \cdot \frac{1}{(3\sqrt{x}+6)} = 9 \cdot \frac{1}{(3\sqrt{x}+6)}.$$

Lembre que, como estamos querendo calcular o limite com $x \to 4$, teremos $x \neq 4$. Assim:

$$\lim_{x\to 4} \frac{3\sqrt{x}-6}{x-4} = \lim_{x\to 4} 9 \cdot \frac{1}{(3\sqrt{x}+6)} = 9 \cdot \frac{1}{12} = \frac{3}{4}.$$

(c) Não sabemos exatamente qual é a função $g(x)$, mas sabemos que ela é contínua e satisfaz

$$\frac{5x-1}{x} < g(x) < \frac{5x^2+3x}{x^2-4}, \quad \forall x > 2.$$

Como essa relação vale para $x > 2$, ao calcularmos o limite com $x \to \infty$, poderemos usar essa relação.

Podemos usar o Teorema do Confronto e calcular o limite em todos os lados da desigualdade, obtendo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x-1}{x} \leq \lim_{x\to\infty} g(x) \leq \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+3x}{x^2-4}$$

Note que, pelos mesmos métodos usados acima em (a) e (b), obtemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x-1}{x} = 5 \text{ e } \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+3x}{x^2-4} = 5.$$

Portanto,

$$5 \leq \lim_{x\to\infty} g(x) \leq 5,$$

ou seja,

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 5.$$

Q3. **(2 pontos)** Determine, se possível, os valores das constantes a e b para que a função

$$h(x) = \begin{cases} ax^2 - 1, & x < 3, \\ 4, & x = 3, \\ bx - 2, & x > 3 \end{cases} \tag{1.0}$$

seja contínua.

Solução: Note que $h(x)$ é contínua nos pontos x com $x < 3$ ou $x > 3$, pois nessas condições a expressão da função é polinomial (e polinômios são contínuos).

Para que h seja contínua em $x = 3$, será preciso que

$$\lim_{x \to 3} h(x) = h(3),$$

ou seja, a função precisa estar definida em $x = 3$, o limite $\lim_{x \to 3} h(x)$ precisa existir e ser igual ao valor da função no ponto.

Note ainda que o limite de $h(x)$ com $x \to 3$ vai existir se, e só se, os limites laterais $\lim_{x \to 3^-} h(x)$ e $\lim_{x \to 3^+} h(x)$ forem iguais.

Vamos então calcular todos esses objetos:

- $h(3) = 4$
- $\lim_{x \to 3^-} h(x) = \lim_{x \to 3^-} (ax^2 - 1) = 9a - 1$
- $\lim_{x \to 3^-} h(x) = \lim_{x \to 3^-} (bx - 2) = 3b - 2$

Para que os limites laterais sejam iguais, deve acontecer

$$9a - 1 = 3b - 2,$$

ou seja, $b = (1 + 9a)/3$.

Por outro lado, para que o limite seja igual ao valor da função, precisamos que $9a - 1 = 4$ e $3b - 2 = 4$.

Resolvendo o sistema definido por todas essas equações, obtemos $a = 5/9$ e $b = 2$.

Q4. (3 pontos) Seja
$$F(x) = x^3 - \frac{1}{x + x^4}.$$

(a) Determine o domínio e imagem de $F(x)$, bem como as assíntotas horizontais e verticais do gráfico de $F(x)$ (se existirem).

(b) Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a equação $F(x) = 4$ admite ao menos três soluções reais.

(c) Um aluno calculou $F(-1/10)$ e $F(1/10)$, percebeu que esses números tem sinais contrários e concluiu que deve existir $y \in (-1/10, 1/10)$ tal que $F(y) = 0$. Você concorda com ele? Justifique.

Solução:

(a) Como
$$F(x) = x^3 - \frac{1}{x + x^4},$$
devemos ter $x \neq 0$ e $x \neq -1$, então o domínio de $F(x)$ é $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

Assíntotas: As assíntotas horizontais podem ser encontradas calculando limites de $F(x)$ com $x \to \infty$ e $x \to -\infty$.

Note que podemos reescrever $F(x)$ como
$$F(x) = \frac{x^7 + x^4 - 1}{x(x+1)\,(x^2 - x + 1)}.$$

Como
$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^7 + x^4 - 1}{x(x+1)\,(x^2 - x + 1)} = \infty$$
e
$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^7 + x^4 - 1}{x(x+1)\,(x^2 - x + 1)} = -\infty,$$
não existem assíntotas horizontais.

Para estudar as assíntotas verticais, vamos focar nos pontos $x = 0$ e $x = -1$, que são os pontos onde a função não está definida (candidatos naturais a assíntotas).

No ponto $x = -1$:
$$\lim_{x \to -1^-} F(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^7 + x^4 - 1}{x(x+1)\,(x^2 - x + 1)} = -\infty$$
$$\lim_{x \to -1^+} F(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^7 + x^4 - 1}{x(x+1)\,(x^2 - x + 1)} = +\infty$$

Assim, a reta $x = -1$ é uma assíntota vertical.

No ponto $x = 0$:
$$\lim_{x \to 0^-} F(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^7 + x^4 - 1}{x(x+1)\,(x^2 - x + 1)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^7 + x^4 - 1}{x(x+1)\left(x^2 - x + 1\right)} = +\infty$$

Assim, a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical.

Imagem: A imagem de $F(x)$ é igual a $\mathbb{R}$, pela discussão feita envolvendo assíntotas verticais.

(b) Seja

$$F(x) = x^3 - \frac{1}{x + x^4} = \frac{x^7 + x^4 - 1}{x(x+1)\left(x^2 - x + 1\right)}.$$

A função é contínua nos intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ e $(0, \infty)$. Portanto, para podermos usar o TVI, teremos que escolher um intervalo onde $F(x)$ é contínua.

Note que $F(-1/2) = 121/56 < 4$. Como

$$\lim_{x\to -1^+} F(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} F(x) = +\infty$$

então existem $a \in (-1, -1/2)$ e $b \in (-1/2, 0)$ com $F(a) = 4$ e $F(b) = 4$.

Analogamente, como $\lim_{x\to 0^+} F(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to +\infty} F(x) = \infty$, existe $c \in (0, \infty)$ com $F(c) = 0$.

(c) O argumento do aluno é inválido, pois a função não é contínua no intervalo $(-1/10, 1/10)$.