IMECC/Unicamp
**MA111 - Cálculo I**
Prova 1
23/04 - 6a feira - noite

**RA:** ____________ **Nome:** ______________________________________________

| Questão: | **Q1** | **Q2** | **Q3** | **Q4** | Total: |
|---|---|---|---|---|---|
| Valor: | 3 | 2,5 | 2,5 | 2 | 10 |
| Nota: | | | | | |

**Instruções para realização e entrega de sua prova:**

1. Essa prova terá início às 18h30 do dia 23/04 . Você terá duas horas para resolvê-la e mais 30 minutos para preparar um arquivo com sua resolução e enviar através do formulário "**Entrega da Prova 1**" em sua turma no Google Classroom.
2. Você deverá escrever a resolução das questões em folhas de papel sulfite branca. Respostas não acompanhadas de argumentos que as confirmem não serão consideradas.
3. Você deverá colocar seu nome, RA e sua assinatura em todas as folhas e numerar as páginas no formato `{página atual}/{total de páginas}`. Uma nova questão sempre deve ser iniciada numa página nova, isto é, nenhuma página deve ter partes de mais do que uma questão.
4. A digitalização da prova deve estar suficientemente legível e entregue preferencialmente como um único arquivo `.pdf` com nome no formato `NomeCompleto-RA.pdf`, por exemplo `IsaacNewton-123456.pdf` (sem espaços e acentuação).
5. Caso você tenha algum problema para submeter sua prova pelo Google Classroom, envie os arquivos escaneados por e-mail para seu professor (dentro do período de realização da prova).
6. **IMPORTANTE:** Na primeira página da sua prova deverá constar a seguinte declaração (manuscrita) e sua assinatura:

   "*Declaro que não estou recebendo ajuda de outras pessoas durante o período de realização da prova, nem faço uso de recursos não permitidos. Comprometo-me a não compartilhar qualquer assunto referente a esta prova por 48h após sua realização.*"

**As questões da prova estão na próxima página.**

**Q1. (3 pontos)** Calcule os limites abaixo (sem usar a Regra de L'Hospital):

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -4} \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{x+4}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+4x+2}{x^2-1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$ onde $2-|x-2|^3 \le f(x) \le 2+|x-2|^2$.

**Solução:**

(a) Quando $x$ se aproxima de $-4$, tanto o numerador quanto o denominador de

$$\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{x+4}$$

se aproximam de zero. Portanto, temos uma indeterminação do tipo "0/0". Vamos simplificar a expressão para tentar resolver essa indeterminação.

$$\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{x+4} = \frac{\frac{x+4}{4x}}{x+4} = \frac{x+4}{4x}\cdot\frac{1}{x+4} = \frac{\cancel{x+4}}{4x}\cdot\frac{1}{\cancel{x+4}} = \frac{1}{4x},$$

desde que $x \neq -4$. Portanto,

$$\lim_{x\to -4}\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{x+4} = \lim_{x\to -4}\frac{1}{4x} = -\frac{1}{16}.$$

(b) Note que quando $x$ se aproxima de 1, o numerador da expressão se aproxima de 7 e o denominador se aproxima de 0. No caso da aproximação ser por valores superiores a 1, como estamos interessados, o denominador se aproximará de 0 por valores superiores a 0.

Assim:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+4x+2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\overbrace{x^2+4x+2}^{7}}{\underbrace{(x-1)}_{0^+}\underbrace{(x+1)}_{2}} = +\infty.$$

(c) Não temos como calcular diretamente o limite de $f(x)$ quando $x\to 2$, pois não temos a expressão da função. No entanto, sabemos que

$$2-|x-2|^3 \le f(x) \le 2+|x-2|^2.$$

Usando o Teorema do Confronto, obtemos

$$\lim_{x\to 2}\left(2-|x-2|^3\right) \le \lim_{x\to 2} f(x) \le \lim_{x\to 2}\left(2+|x-2|^2\right).$$

Como

$$\lim_{x\to 2} \left(2 - |x-2|^3\right) = 2 \;\text{ e }\; \lim_{x\to 2} \left(2 + |x-2|^2\right)$$

segue que

$$2 \leq \lim_{x\to 2} f(x) \leq 2,$$

portanto

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 2.$$

**Q2. (2,5 pontos)** Seja

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^5+4}{x^5+x^3+x+2} & \text{se } x \geq 0, \\ \beta \cos(x) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

(a) Existe algum valor de $\beta$ que torna $f$ é contínua em $x = 0$? Justifique sua resposta.

(b) Encontre a assíntota horizontal de $f$ quando $x \to \infty$. Existe assíntota vertical em algum ponto?

**Solução:**

(a) Para que $f(x)$ seja contínua em $x = 0$ precisamos que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0).$$

Temos que $f(0) = 4/2 = 2$ . Se calcularmos os limites laterais

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

encontraremos

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \beta\cos(x) = \beta\cos(0) = \beta,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^5+4}{x^5+x^3+x+2} = 2.$$

Portanto, os limites laterais são iguais se, e só se, $\beta = 2$ e essa é a mesma condição para que a função seja contínua.

(b) Para buscar a assíntota horizontal, devemos calcular

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

e

$$\lim_{x\to -\infty} f(x).$$

Assim:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^5+4}{x^5+x^3+x+2} = 1$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \beta\cos(x) \text{ (não existe)}$$

Portanto, temos uma assíntota horizontal em $y = 1$ quando $x \to \infty$.

Não existem assíntotas verticais, pois não existem pontos de descontinuidade no domínio da função (note que o denominador da expressão de $f(x)$ para $x > 0$ não se anula).

**Q3. (2,5 pontos)** Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a equação

$$10\,\text{sen}^3(x) - 7\,\text{sen}^2(x) + 20\,\text{sen}(x) = 14$$

tem pelo menos uma raiz no intervalo $(0, \pi/2)$.

**Solução:** Seja $f(x) = 10\,\text{sen}^3(x) - 7\,\text{sen}^2(x) + 20\,\text{sen}(x) - 14$. Essa função é contínua em $\mathbb{R}$, então podemos usar o TVI em qualquer intervalo fechado.

Temos:

- $f(0) = -14$ e
- $f(\pi/2) = 10 - 7 + 20 - 14 = 9$,

portanto existe $c \in [0, \pi/2]$ com $f(c) = 0$, resolvendo a equação. Como os extremos desse intervalo não satisfazem essa condição, segue que $c \in (0, \pi/2)$.

**Q4.** **(2 pontos)** Encontre o ponto do gráfico de $f(x) = x^2$ onde a reta tangente é paralela à reta $y = 10x - 7$.

**Solução:** Procuramos um ponto no gráfico de $y = x^2$ cuja reta tangente $y = ax + b$ é paralela à reta $y = 10x - 7$. Isso significa que as retas $y = ax + b$ e a reta $y = 10x - 7$ tem o mesmo coeficiente angular, ou seja, $a = 10$.

Vimos que o coeficiente angular $a$ da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dado pelo limite

$$a = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

No nosso caso sabemos que $a = 10$, então temos que

$$10 = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}.$$

Como

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x - x_0)}(x + x_0)}{\cancel{x - x_0}} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0,$$

devemos ter $2x_0 = 10$, ou seja, $x_0 = 5$. Portanto, o ponto que procuramos é $(5, 25)$.