IMECC/Unicamp
MA111 - Cálculo I
Prova 1
14/04/2023 - 6a feira - manhã

RA: ____________ **Nome:** ____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	**Q5**	Total:
Valor:	2	2	2	2	2	10
Nota:						

Instruções para realização e entrega de sua prova:

1. Essa prova terá 1h40 de duração.
2. Coloque seu nome e RA em todas as páginas.
3. Não faça uso de telefone celular ou outro recurso eletrônico durante a prova.
4. Não divulgue as questões desta prova por pelo menos 2 dias.
5. Ao entregar a prova, você atesta que não utilizou nenhum meio fraudulento para realizá-la.

As questões da prova começam na próxima página. Esta prova tem 5 questões.

Q1. **(2 pontos)** Determine todos os valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem

$$x < |x - 2| < 3$$

e ilustre o conjunto-solução na reta real.

Solução: Vamos desmembrar em duas inequações e resolver cada uma delas separadamente.

- $x < |x - 2|$

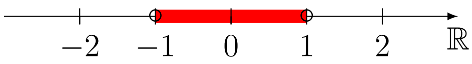
  Esta inequação é equivalente a $x - 2 > x$ (para $x \geq 2$) ou $x - 2 < -x$ (para $x < 2$). A primeira desigualdade não tem solução, já a segunda tem como solução $2x < 2$, ou $x < 1$.

- $|x - 2| < 3$

  Esta inequação é equivalente a $x - 2 < 3$ (para $x \geq 2$) ou $-3 < x - 2$ (para $x < 2$). A primeira desigualdade tem solução $2 \leq x < 5$, já a segunda tem como solução $2 > x > -1$, ou seja, $x \in (-1, 5)$.

Tomando a interseção das duas soluções, encontramos que a solução do problema inicial: $x \in (-1, 1)$.

Uma representação da solução segue abaixo:



Grade de correção:

- desmembrar em duas desigualdades ou passo equivalente: 0,5
- obter $x < 1$ por métodos corretos: 0,5
- obter $x \in (-1, 5)$ por métodos corretos: 0,5
- esboço da reta: 0,5
- descontar 0,2 em caso de erro (não acumular erros)

Q2. **(2 pontos)** Avalie os limites abaixo e encontre o valor correspondente no caso dos que existem. Não use a regra de L'Hospital. Sua resposta precisa ser justificada.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^5+1}{x+1}$

Solução:

Instruções gerais para correção:

- descontar 0,1 em caso de não escrever $\lim_{x\to *}$, só ficar usando =.
- descontar 0,2 em caso de erro (não acumular erros).
- usar L'Hopital ou métodos muito mais elaborados: desconsiderar o item.

(a) **(0,8 pontos)** Note que, como $x \neq 2$,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} &= \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)}{x-2}\cdot\frac{(\sqrt{x^2+5}+3)}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{x^2-2}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}\\ &= \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x^2+5}+3)}\\ &= \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}\end{aligned}$$

Portanto

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

(b) **(0,6 pontos)** Note que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}\cdot\frac{5}{5}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x}\cdot 5\right) = 5\cancelto{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x}} = 5,$$

onde usamos o limite fundamental

$$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1.$$

(c) **(0,6 pontos)** Note que se tentarmos substituir $x=-1$ na expressão, o numerador e o denominador resultarão em zero, portanto teremos uma indeterminação.

Temos que

$$x^5+1 = (x+1)(1-x+x^2-x^3+x^4),$$

o que pode ser comprovado efetuando a divisão de polinômios. Assim:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^5+1}{x+1} = \lim_{x\to -1}(1-x+x^2-x^3+x^4) = 5.$$

Q3. (2 pontos) Seja $k \in \mathbb{R}$ e considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 1, \\ \dfrac{x^2+9}{x^2-k}, & x > 1. \end{cases}$$

(a) Para qual(is) valor(es) de k a função $f(x)$ é contínua?

(b) Para o(s) valor(es) de k que você encontrou em (a), verifique se o limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

existe.

Solução:

(a) **(1.4 pontos)** Note que para $x < 1$, a função é contínua. Já para $x > 1$, como a função vale

$$\frac{x^2+9}{x^2-k}$$

e esta é uma função racional cujo denominador se anula nos pontos $x = \pm\sqrt{k}$, teremos continuidade se $0 \leq k < 1$ ou não estiver definido ($k < 0$). Portanto, esta é uma condição que precisamos impor inicialmente: $k < 1$.

Já em $x = 1$, temos que:

- $f(1) = 2$
- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2+1) = 2$
- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+9}{x^2-k} = \dfrac{10}{1-k}$ (lembre-se que $k \neq 1$)

Assim, a continuidade em $x = 1$ só ocorrerá se $2(1-k) = 10$, ou seja, $k = -4$.

Instruções gerais para correção:

- encontrar corretamente o valor de k, comparando limites laterais e o valor da função: 1,2 pontos
- observar a condição de continuidade para $x > 1$: 0,2 pontos
- erro de conta: descontar 0,2 (não acumular erros)

(b) **(0.6 pontos)** Limite pela esquerda:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x+1 = 2$$

Limite pela direita:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{x^2+9}{x^2+4}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+9-2x^2-8}{(x^2+4)(x-1)} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{-x^2+1}{(x^2+4)(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-x-1}{x^2+4} = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

Portanto, como os limites laterais são diferentes, o limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

não existe.

Instruções gerais para correção:

- 0,3 para cada limite lateral correto
- descontar 0,2 caso não conclua corretamente

Q4. (2 pontos) Considere a função

$$h(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}.$$

(a) Determine o maior domínio possível $A \subset \mathbb{R}$ para a função $h(x)$.

(b) Determine as assíntotas de $y = h(x)$ (lembre-se de considerar os limites laterais e os casos $x \to \infty$ e $x \to -\infty$).

Solução:

(a) A função $h(x)$ tem duas restrições no domínio: devemos ter $x \neq 0$, pois é o termo no denominador, e devemos ter $x^2 + x + 1 > 0$, pois este termo está dentro de raiz quadrada. Porém, observe que o polinômio $q(x) = x^2 + x + 1$ não tem raízes, sendo sempre positivo. Logo, ele não adiciona nenhuma restrição ao domínio, e daí $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Para determinar a assíntotas horizontais, iremos calcular os limites

$$\lim_{x\to\infty} h(x) \text{ e } \lim_{x\to-\infty} h(x).$$

Para calcular as assíntotas verticais, precisaremos calcular os limites

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) \text{ e } \lim_{x\to 0^+} h(x).$$

Como um teste para verificar se existem assíntotas inclinadas, precisaremos calcular também limites

$$\lim_{x\to\pm\infty} h(x)/x.$$

assíntotas horizontais

- $$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} h(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+1/x+1/x^2)}}{x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{1+1/x+1/x^2}}{\cancel{x}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+1/x+1/x^2} = 1\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} h(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+1/x+1/x^2)}}{x} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\cancel{x}\sqrt{1+1/x+1/x^2}}{\cancel{x}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+1/x+1/x^2} = -1\end{aligned}$$

Note que quando $x \to \infty$, o x^2 “sai da raiz” com sinal positivo, pois x é positivo; já quando $x \to -\infty$, o x^2 “sai da raiz” com sinal negativo, pois x é negativo.

Portanto, $y = 1$ e $y = -1$ são assíntotas horizontais.

assíntotas verticais

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancelto{1}{\sqrt{x^2+x+1}}}{\cancelto{0^-}{x}} = -\infty$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancelto{1}{\sqrt{x^2+x+1}}}{\cancelto{0^+}{x}} = \infty$

Portanto, a reta $x = 0$ é uma assíntotas vertical.

assíntotas inclinadas

- $\displaystyle\lim_{x\to \pm\infty} h(x)/x = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x^2} = 0.$

Como o resultado do limite acima foi zero, a única assíntota "inclinada" é a assíntota horizontal que nós já encontramos.

Instruções gerais para correção:

- 0,4 para cada assíntota calculada corretamente $(\pm\infty, 0^{\pm})$
- 0,4 pelo domínio
- não precisa de desconto por não considerar assíntotas inclinadas.

Q5. **(2 pontos)** É verdade que a equação

$$x^5 + \frac{1}{1-x^2} = 0$$

possui uma solução no intervalo $(0, 2)$? Justifique!

Solução: Seja

$$f(x) = x^5 + \frac{1}{1-x^2}.$$

Queremos verificar se a equação $f(x) = 0$ tem alguma solução com $x \in (0, 2)$.

Note que a função não está definida em $x = 1$, portanto se tentarmos aplicar o Teorema de Bolzano (ou do Teorema do Valor Intermediário) no intervalo $[0, 2]$, teremos um problema. Além disso,

- $f(0) = 1 > 0$,
- $f(2) = 95/3 > 0$.

No entanto, note que

- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(x^5 + \frac{1}{1-x^2}\right) = +\infty$
- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(x^5 + \frac{1}{1-x^2}\right) = -\infty$

Assim, deve existir um número $a \in \mathbb{R}$, um pouco maior do que 1, tal que $f(a) < 0$. Daí, pelo Teorema de Bolzano no intervalo $[a, 2]$, garantimos a existência da solução de $f(x) = 0$, pois a função é contínua em $(1, \infty)$ e $a > 1$.

Instruções gerais para correção:

- 1,5 pelo argumento envolvendo assíntotas que existe $a \in (1, 2)$ tal que $f(a) < 0$.
- 0,5 pela conclusão (de que existe a solução, pelo Teorema de Bolzano, etc)
- descontar 0,5 se não mencionar continuidade, TVI, teorema de Bolzano, etc (não cumulativo)
- descontar 1,5 se aplicar o TVI, teorema de Bolzano, etc considerando o intervalo onde a função não é contínua (não cumulativo)

Rascunho/folha extra