IMECC/Unicamp
MA111 - Cálculo I
Prova 1
14/04/2023 - 6a feira - noite

RA: ____________ **Nome:** ____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	**Q5**	Total:
Valor:	2	2	2	2	2	10
Nota:						

Instruções para realização e entrega de sua prova:

1. Essa prova terá 1h40 de duração.
2. Coloque seu nome e RA em todas as páginas.
3. Não faça uso de telefone celular ou outro recurso eletrônico durante a prova.
4. Não divulgue as questões desta prova por pelo menos 2 dias.
5. Ao entregar a prova, você atesta que não utilizou nenhum meio fraudulento para realizá-la.

As questões da prova começam na próxima página. Esta prova tem 5 questões.

Q1. (2 pontos) Determine todos os valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem

$$1 \leq \left| \frac{x-5}{x+3} \right| < 2$$

e ilustre o conjunto-solução na reta real.

Solução:
Temos que $\dfrac{x-5}{x+3} \geq 0$ quando $x < -3$ ou $x \geq 5$, e $\dfrac{x-5}{x+3} < 0$ no intervalo $(-3, 5)$.
Portanto:
se $x < -3$ ou $x \geq 5$: então podemos tirar o módulo e ficamos com

$$1 \leq \frac{x-5}{x+3} < 2$$

Agora se $x > 5$, o termo $x + 3 > 0$, logo ficamos com

$$x + 3 \leq x - 5 < 2x + 6.$$

Grade de correção:

- desmembrar em duas desigualdades ou passo equivalente: 0,5
- obter $x < 1$ por métodos corretos: 0,5
- obter $x \in (-1, 5)$ por métodos corretos: 0,5
- esboço da reta: 0,5
- descontar 0,2 em caso de erro (não acumular erros)

Q2. **(2 pontos)** Avalie os limites abaixo e encontre o valor correspondente no caso dos que existem. Não use a regra de L'Hospital. Sua resposta precisa ser justificada.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+x^2+1}{x^2-5x^3+1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^5+x^3+7}{x^4+x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} x^5 \operatorname{sen}(1/x)$

Solução: Instruções gerais para correção:

- descontar 0,1 em caso de não escrever $\lim_{x\to *}$, só ficar usando $=$.
- descontar 0,2 em caso de erro (não acumular erros).
- usar L'Hopital ou métodos muito mais elaborados: desconsiderar o item.

(a) Temos que

$$\frac{x^3+x^2+1}{x^2-5x^3+1} = \frac{\cancel{x^3}(1+1/x+1/x^3)}{\cancel{x^3}(1/x-5+1/x^3)} \to \frac{1}{5}$$

quando $x\to\infty$.

(b) Temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5+x^3+7}{x^4+x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot\frac{x^5+x^3+7}{x^3+1}$$

Porém, este último limite não existe, pois

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\cdot\frac{x^5+x^3+7}{x^3+1} = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot\frac{x^5+x^3+7}{x^3+1} = \infty.$$

(c) Note que a função $\operatorname{sen}(1/x)$ é limitada e a função x^5 tende a zero quando $x\to 0$. Assim, pelo Teorema do Confronto, temos

$$\lim_{x\to 0} x^5 \operatorname{sen}(1/x) = 0.$$

Q3. **(2 pontos)** Seja $k \in \mathbb{R}$ e considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3, & x \leq 1, \\ k - x^2, & x > 1. \end{cases}$$

(a) Para quais valores de k a função $f(x)$ é contínua?

(b) Para cada valor de k encontrado em (a), verifique se existe o limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

Solução: Instruções gerais para correção da (a):

- encontrar corretamente o valor de k, comparando limites laterais e o valor da função: 1,2 pontos
- observar a condição de continuidade para $x > 1$: 0,2 pontos
- erro de conta: descontar 0,2 (não acumular erros)

Instruções gerais para correção da (b):

- 0,3 para cada limite lateral correto
- descontar 0,2 caso não conclua corretamente

(a) **(1,4 pontos)** Note que a função é contínua para todo $x \neq 1$. No ponto $x = 1$ temos que:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^3 + 3) = 4$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (k - x^2) = k - 1$$

Como $f(1) = 4$, a função será contínua se, e só se, $4 = k - 1$, ou seja, $k = 5$.

(b) **(0,6 pontos)** Para $k = 5$ a função fica

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3, & x \leq 1, \\ 5 - x^2, & x > 1. \end{cases}$$

Temos que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x^3 + 3) - 4}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} (x^2 + x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(5 - x^2) - 4}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1 - x^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} -(x + 1) = -2$$

Como os limites laterais não são iguais, o limite não existe.

Q4. (**2 pontos**) Considere a função

$$h(x) = \frac{x+1}{x-2}.$$

(a) Determine as assíntotas de $y = h(x)$ (lembre-se de considerar os limites laterais e os casos $x \to \infty$ e $x \to -\infty$).

(b) Existe algum x tal que $h(x) = 1$? Justifique.

Solução:

(a) (**1,6 pontos**) A função é descontínua em $x = 2$. Portanto, a reta $x = 2$ é uma candidata a ser assíntota vertical. Temos que:

assíntotas horizontais

- $\lim_{x\to\infty} h(x) = 1$
- $\lim_{x\to-\infty} h(x) = 1$

Logo, $y = 1$ é a única assíntota horizontal.

assíntotas verticais

- $\lim_{x\to 2^-} h(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to 2^+} h(x) = \infty$

Logo $x = 2$ é uma assíntota vertical.

Instruções gerais para correção:

- 0,4 para cada assíntota calculada corretamente ($\pm\infty, 2^{\pm}$)
- não precisa de desconto por não considerar assíntotas inclinadas.

(b) (**0,4 pontos**) Se $h(x) = 1$ então $x + 1 = x - 2$. Logo, teríamos $1 = -2$, o que é um absurdo. Logo, não existe solução. Note que argumento "não existe, pois $y = 1$ é assíntota" não vale.

Q5. **(2 pontos)** Mostre que a equação

$$x^6 + x^5 + x - 1 = 0$$

possui pelo menos duas soluções no intervalo $[-2, 2]$.

Solução:

Seja $f(x) =$

Instruções gerais para correção:

- 1,5 pelo argumento envolvendo assíntotas que existe $a \in (1, 2)$ tal que $f(a) < 0$.
- 0,5 pela conclusão (de que existe a solução, pelo Teorema de Bolzano, etc)
- descontar 0,5 se não mencionar continuidade, TVI, teorema de Bolzano, etc (não cumulativo)
- descontar 1,5 se aplicar o TVI, teorema de Bolzano, etc considerando o intervalo onde a função não é contínua (não cumulativo)

Rascunho/folha extra