IMECC/Unicamp
MA111 - Cálculo I
Prova 2
27 de maio - 5a feira - noite

RA: ____________ **Nome:** ____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	2	2,5	2,5	3	10
Nota:					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

1. Essa prova terá início às 18h30 do dia 27 de maio de 2021. Você terá duas horas para resolvê-la e mais 30 minutos para preparar um arquivo com sua resolução e enviar através do "Google Sala de Aula".

2. Você deverá escrever a resolução das questões em folhas de papel sulfite branca. Respostas não acompanhadas de argumentos que as confirmem não serão consideradas.

3. Você deverá colocar seu nome, RA e sua assinatura em todas as folhas e numerar as páginas no formato `{página atual}/{total de páginas}`. Uma nova questão sempre deve ser iniciada numa página nova, isto é, nenhuma página deve ter partes de mais do que uma questão.

4. A digitalização da prova deve estar suficientemente legível e entregue preferencialmente como um único arquivo `.pdf` com nome no formato `NomeCompleto-RA.pdf`, por exemplo `GottfriedLeibniz-123456.pdf` (sem espaços e/ou acentuação).

5. Caso você tenha algum problema para submeter sua prova pelo "Google Sala de Aula", envie os arquivos escaneados por e-mail para seu professor (dentro do período de realização da prova).

6. **IMPORTANTE:** Na primeira página da sua prova deverá constar a seguinte declaração (manuscrita) e sua assinatura:

   "*Declaro que não estou recebendo ajuda de outras pessoas durante o período de realização da prova, nem faço uso de recursos não permitidos.*
   Comprometo-me a não compartilhar qualquer assunto referente a esta prova por 48h após sua realização."

As questões da prova estão na próxima página.

ATENÇÃO: nas questões abaixo, estamos indicando por:

- A a soma dos dois primeiros dígitos de seu RA,
- B a soma dos três primeiros dígitos do seu RA e
- C a soma de todos os dígitos de seu RA.

Por exemplo,

- se $RA = 12345$, então $A = 1+2 = 3$, $B = 1+2+3 = 6$ e $C = 1+2+3+4+5 = 15$,
- se $RA = 987654$, então $A = 9+8 = 17$, $B = 9+8+7 = 24$ e $C = 9+8+7+6+5+4 = 39$.

Use os valores numéricos obtidos a partir de seu RA.

****

Q1. Faça o que se pede em cada item, indicando claramente a(s) propriedade(s) utilizada(s) durante os respectivos cálculos:

(a) **(1 ponto)** Sendo $g(x) = e^{A\text{sen}(\ln x)} - \ln\left(\text{sen}\left(\frac{1}{A}e^x\right)\right)$, obtenha $g'(x)$;

(b) **(1 ponto)** Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(Bx)}{x^3}$.

Solução:

(a) Note que

$$\begin{aligned} g'(x) =& \frac{d}{dx}e^{A\text{sen}(\ln x)} - \frac{d}{dx}\ln\Big(\text{sen}\big(\frac{1}{A}e^x\big)\Big) \quad \textbf{(10\% da pontuação)} \\ =& e^{A\text{sen}(\ln x)} \cdot A\cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} - \quad \textbf{(30\% da pontuação)} \\ & - \frac{1}{\text{sen}\big(\frac{1}{A}e^x\big)} \cdot \cos\big(\frac{1}{A}e^x\big) \cdot \frac{1}{A}e^x \quad \textbf{(30\% da pontuação)} \\ =& \frac{A\cos(\ln x)e^{A\text{sen}(\ln x)}}{x} - \frac{1}{A}e^x\text{cotg}\big(\frac{1}{A}e^x\big). \end{aligned}$$

Para a primeira igualdade foi usado que a derivada da diferença é a diferença das derivadas **(10% da pontuação)**. Já para a segunda fez-se uso da regra da cadeia de forma iterativa **(20% da pontuação)**.

(b) Note que temos uma indeterminação do tipo "∞/∞". **(20% da pontuação)**

Como as funções estão na hipótese do Teorema de L'Hospital **(30% da pontuação)**, podemos calcular o limite fazendo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(Bx)}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{3x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3x^3} = 0 \quad \textbf{(50\% da pontuação)}$$

Q2. (2,5 pontos) Um balão esférico está sendo enchido a uma taxa de 4 m^3/s. Encontre a taxa de crescimento do raio do balão quando o diâmetro for igual a $8m$.

Solução: O volume de um balão esférico de raio r é dado pela fórmula

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3. \textbf{ (10\% da pontuação)}$$

Na medida que é enchido, tanto o raio quando o volume variam com o tempo, ou seja, $V = V(t)$ e $r = r(t)$. Derivando a expressão anterior temos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi 3r^2\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt} \textbf{ (30\% da pontuação)}$$

Sabendo que a taxa com a qual ele está sendo enchido é 4 m^3/s, temos que $dV/dt = 4$, ou seja,

$$4 = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}. \textbf{ (20\% da pontuação)}$$

Quando o diâmetro do balão for 8 m, o raio será $r = 4$ m, portanto

$$4 = 4\pi 16\frac{dr}{dt},$$

ou seja,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{16\pi}\ m/s. \textbf{ (40\% da pontuação)}$$

Q3. (2,5 pontos) Encontre todos os pontos sobre a curva dada pela equação

$$x^4y^5 + x^5y^4 = 2C$$

nos quais a inclinação da reta tangente à curva é igual a -1.

Solução: Por derivação implícita, temos

$$(4x^3)y^5 + x^4(5y^4y') + (5x^4)y^4 + x^5(4y^3y') = 0,$$
(15% da pontuação)

donde

$$y' = -\frac{5x^4y^4 + 4x^3y^5}{5x^4y^4 + 4x^5y^3}.$$ **(10% da pontuação)**

Impondo $y' = -1$, encontramos então

$$x^5y^3 = x^3y^5.$$ **(20% da pontuação)**

Note que esta equação é satisfeita sobre os eixos coordenados $x = 0$ e $y = 0$ **(5% da pontuação)**. Além disso, para $x \neq 0$ e $y \neq 0$, esta equação se reduz a $x^2 = y^2$, ou melhor, a $y = \pm x$ **(10% da pontuação)**.

Basta então determinar eventuais intersecções da curva $x^4y^5 + x^5y^4 = 2C$ com cada uma destas retas **(5% da pontuação)**:

i. $x = 0$, $y = 0$ ou $y = -x$:

ao substituir na equação da curva, temos o absurdo $0 = 2C$, o que mostra que não há intersecções neste caso **(10% da pontuação)**;

ii. $y = x$:

a substituição fornece $2x^9 = 2C$, o que equivale a $x = \sqrt[9]{C}$, de modo que $(\sqrt[9]{C}, \sqrt[9]{C})$ é o único ponto de intersecção **(10% da pontuação)**.

Logo, $(\sqrt[9]{C}, \sqrt[9]{C})$ é o único ponto sobre a curva $x^4y^5 + x^5y^4 = 2C$ no qual a inclinação da reta tangente é -1 **(15% da pontuação)**.

Q4. Seja $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$.

(a) **(1 ponto)** Determine os intervalos de crescimento/decrescimento de f, e os seus pontos de máximo/mínimo.

(b) **(1 ponto)** Determine os intervalos onde f é côncava para cima/baixo e os seus pontos de inflexão.

(c) **(0,5 pontos)** Caso existam, encontre as assíntotas horizontais e verticais de f.

(d) **(0,5 pontos)** Esboce o gráfico de f usando (pelo menos) as informações obtidas nos itens (a), (b) e (c), justificando.

Solução: Primeiro note que o domínio de $y = f(x)$ é $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

(a) A derivada de $f(x)$ é

$$f'(x) = \frac{10x}{(x^2-4)^2}. \textbf{ (30\% da pontuação)}$$

Nos pontos onde está definido, o denominador de $f'(x)$ é sempre positivo, enquanto o numerador é positivo para $x > 0$ e negativo para $x < 0$.

Portanto, a função é decrescente nos intervalos $(-\infty, -2)$ e $(-2, 0)$, e é crescente nos intervalos $(0, 2)$ e $(2, \infty)$. **(60% da pontuação)**

Temos um ponto crítico em $x = 0$. Como

$$f''(x) = -\frac{10\,(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

segue que $f''(0) > 0$, portanto a função tem um mínimo local em $x = 0$. **(10% da pontuação)**

(b) Usando novamente a expressão

$$f''(x) = -\frac{10\,(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}, \textbf{ (50\% da pontuação)}$$

note que $f''(x) > 0$ no caso em que $x \in (-2, 2)$ e $f''(x) < 0$ no caso em que $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. Portanto, a função é côncava para cima se $x \in (-2, 2)$ e côncava para baixo se $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. **(40% da pontuação)**

Como não existem valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $f''(x) = 0$, não existem pontos de inflexão. **(10% da pontuação)**

(c) Com $x = -2$ e $x = 2$ são pontos que anulam o denominador de $f(x)$, são candidatos a assíntotas verticais. Vamos verificar isso calculando alguns limites.

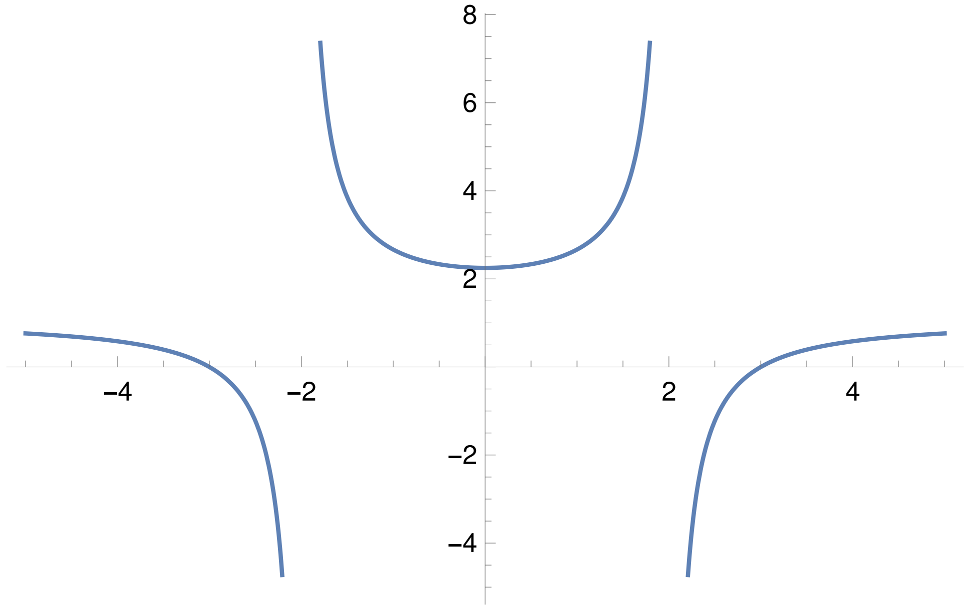
- $\displaystyle\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$

Assim, de fato, as retas $x = -2$ e $x = 2$ são assíntotas verticais. **(60% da pontuação)** O fato do limite ser $+\infty$ ou $-\infty$ nos ajudará no esboço do gráfico.

Para estudar a existência de assíntotas horizontais vamos calcular limites com $x \to \infty$ e $x \to -\infty$:

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$

Portanto a reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal. **(40% da pontuação)**



(d)