**IMECC/Unicamp**
**MA111 - Cálculo I**
Prova 2
27 de maio - 5a feira - tarde

**RA:** ____________ **Nome:** ______________________________________________

| Questão: | **Q1** | **Q2** | **Q3** | **Q4** | Total: |
|---|---|---|---|---|---|
| Valor: | 2 | 2 | 2,5 | 3,5 | 10 |
| Nota: | | | | | |

**Instruções para realização e entrega de sua prova:**

1. Essa prova terá início às 16h do dia 27 de maio de 2021. Você terá duas horas para resolvê-la e mais 30 minutos para preparar um arquivo com sua resolução e enviar através do "Google Sala de Aula".

2. Você deverá escrever a resolução das questões em folhas de papel sulfite branca. Respostas não acompanhadas de argumentos que as confirmem não serão consideradas.

3. Você deverá colocar seu nome, RA e sua assinatura em todas as folhas e numerar as páginas no formato `{página atual}/{total de páginas}`. Uma nova questão sempre deve ser iniciada numa página nova, isto é, nenhuma página deve ter partes de mais do que uma questão.

4. A digitalização da prova deve estar suficientemente legível e entregue preferencialmente como um único arquivo `.pdf` com nome no formato `NomeCompleto-RA.pdf`, por exemplo `GottfriedLeibniz-123456.pdf` (sem espaços e/ou acentuação).

5. Caso você tenha algum problema para submeter sua prova pelo "Google Sala de Aula", envie os arquivos escaneados por e-mail para seu professor (dentro do período de realização da prova).

6. **IMPORTANTE:** Na primeira página da sua prova deverá constar a seguinte declaração (manuscrita) e sua assinatura:

   "*Declaro que não estou recebendo ajuda de outras pessoas durante o período de realização da prova, nem faço uso de recursos não permitidos.*
   *Comprometo-me a não compartilhar qualquer assunto referente a esta prova por 48h após sua realização.*"

**As questões da prova estão na próxima página.**

**Q1.** Calcule, caso existam, os seguintes limites

(a) **(1 ponto)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$

(b) **(1 ponto)** $\displaystyle\lim_{x\to 0+} (\text{sen}x)^x$

**Solução:** (a) Como $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 = 0 = \lim_{x\to 0} 1 - \cos x$, usando a regra de l'Hôspital, obtemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin(x)} = 2, \text{ (0,5 ponto)}$$

onde usamos o limite fundamental $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ ou L'Hospital novamente (0,5 ponto).

(b) Note em primeiro lugar que podemos reescrever a função $(\text{sen}x)^x$ da forma $\mathrm{e}^{x\ln(\text{sen}x)}$, sendo assim:

$$\lim_{x\to 0+} (\text{sen}x)^x = \lim_{x\to 0+} \mathrm{e}^{x\ln(\text{sen}x)} = \exp\Big(\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(\text{sen}x)}{1/x}\Big) \text{(0,5 ponto)}$$

pois a função exponencial é contínua.

Temos uma indeterminação,

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(\text{sen}x)}{1/x} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right]$$

portanto por L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(\ln(\text{sen}x))}{(1/x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{(\ln(\text{sen}x))'}{(1/x)'} = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos x/\text{sen}x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} -\frac{x^2}{\text{tg}x} = \left[\frac{0}{0}\right],$$

por L'Hospital novamente (0,5 ponto),

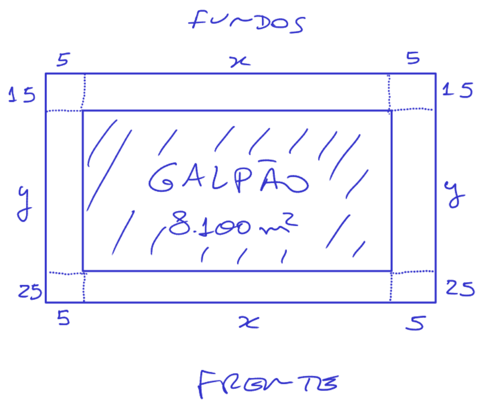
$$\lim_{x\to 0+} -\frac{x^2}{\text{tg}x} = \lim_{x\to 0+} \frac{-2x}{\sec^2 x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Assim

$$\lim_{x\to 0+} (\text{sen}x)^x = e^0 = 1.$$

**Q2.** **(2 pontos)** Um galpão deve ser construído com uma área retangular de 8100 $m^2$. É necessário que haja um recuo de 25 m na frente, 15 m na parte traseira e 5 m em cada lado. Encontre as dimensões do lote de área mínima na qual tal galpão pode ser construído. Faça um esboço da situação.

**Solução:** Pelo enunciado, o esboço da situação é o seguinte:




A área ocupada pelo galpão, já considerando os recuos, pode ser modelada por

$$A = (x+10)(y+40) = xy + 10y + 40x + 400.\text{(0,5 ponto)}$$

Como a área ocupada pelo galpão precisa ter 8100 $m^2$, segue que $xy = 8100$, portanto

$$y = \frac{8100}{x}.$$

Substituindo na equação para $A$, temos

$$A(x) = 8100 + \frac{81000}{x} + 40x + 400 = 8500 + \frac{81000}{x} + 40x \text{ (0,5 ponto)}$$

Portanto

$$A'(x) = 40 - \frac{81000}{x^2}$$

e os pontos críticos, resultados de $A'(x) = 0$, são $x = -45$ e $x = 45$. (0,5 ponto) Vamos descartar o $x = -45$, já que $x$ é a medida de um lado.

Como

$$A''(x) = \frac{162000}{x^3}$$

segue que $A''(45) > 0$, logo $x = 45$ é um ponto de mínimo local. Como a função é contínua em $x > 0$ e não existem outros pontos críticos em $(0, \infty)$, esse ponto de mínimo local também é mínimo global. Usando a relação $xy = 8100$, encontramos que $y = 180$.

As dimensões do lote são, por tanto 55 $m \times 220$ $m$ (note que o terreno tem $x + 10$ por $y + 40$). (0,5 ponto)

**Q3. (2,5 pontos)** Encontre a equação da reta tangente à curva de equação $x^4 + xy^3 + y^6 = 1$ no ponto $(1, -1)$.

**Solução:** Se $x^4 + xy^3 + y^6 = 1$, calculando $dy/dx$ implicitamente obtemos

$$4x^3 + y^3 + 3xy^2\frac{dy}{dx} + 6y^5\frac{dy}{dx} = 0.$$

Isolando $\frac{dy}{dx}$ obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x^3 - y^3}{3xy^2 + 6y^5}.$$ (1,0 ponto)

Substituindo o ponto $(1, -1)$, segue que

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(1,-1)} = \frac{-3}{-3} = 1.$$ (0,5 ponto)

Portanto a equação da reta é $y + 1 = x - 1$, ou $y = x - 2$. (1,0 ponto)

**Q4.** Seja $f(x) = -\dfrac{x^4}{x^4-4}$.

(a) **(1 ponto)** Determine os intervalos de crescimento/decrescimento de $f$, e os seus pontos de máximo/mínimo.

(b) **(1 ponto)** Determine os intervalos onde $f$ é côncava para cima/baixo e os seus pontos de inflexão.

(c) **(0,5 pontos)** Caso existam, encontre as assíntotas horizontais e verticais de $f$.

(d) **(0,5 pontos)** Seja $\alpha \in (0,1)$. Existe solução para a equação $f(x) = \alpha$? Justifique.

(e) **(0,5 pontos)** Esboce o gráfico de $f$ usando (pelo menos) as informações obtidas nos itens (a), (b) e (c), justificando.

**Solução:**

(a) Vejamos os possíveis pontos de máximo/mínimos locais. De fato, pela regra de derivação do quociente temos que

$$f'(x) = -\left[\frac{4x^3(x^4-4) - x^4.4x^3}{(x^4-4)^2}\right] = -\left[\frac{4x^7 - 16x^3 - 4x^7}{(x^4-4)^2}\right] = \frac{16x^3}{(x^4-4)^2}.\text{(0,5 ponto)}$$

Assim, $f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$

Além disso,

1. $f'(x) > 0$ se $x > 0$ com $x \neq \sqrt{2}$. Logo, $f$ é crescente em $(0,\sqrt{2}) \cap (\sqrt{2},+\infty)$.
2. $f'(x) < 0$ se $x < 0$ com $x \neq -\sqrt{2}$. Logo, $f$ é decrescente em $(-\infty,-\sqrt{2}) \cap (-\sqrt{2},0)$.

Portanto, pelo Teste da Derivada Primeira, $x = 0$ **é ponto de mínimo local**. (0,5 ponto)

(b) Analisemos os intervalos onde $f$ é côncava para cima ou para baixo. De fato, temos que

$$f''(x) = 16\left[\frac{3x^2(x^4-4)^2 - x^3.2(x^4-4).4x^3}{(x^4-4)^4}\right] = -16\frac{x^2(5x^4+12)(x^4-4)}{(x^4-4)^4}\text{(0,5 ponto)}$$

Dado que $(x^4-4)^4 > 0$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$, basta analisarmos o sinal do numerador. Além disso, como $-16x^2(5x^4+12) \leq 0$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$, então basta analisarmos o sinal de $x^4 - 4$.

De fato, temos que

1. $f''(x) < 0$ se $x^4 - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow x < -\sqrt{2}$ ou $\quad x > \sqrt{2}$. Logo, $f$ **é côncava para baixo em** $(-\infty,-\sqrt{2}) \cap (\sqrt{2},\infty)$.
2. $f''(x) > 0$ se $x^4 - 4 < 0 \quad \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. Logo, $f$ **é côncava para cima em** $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. (0,4 ponto pelas 2 condições)

Por fim, note que $f''$ não existe para $x = \pm\sqrt{2}$, os quais não estão no domínio de $f$. Logo, $f$ não possui pontos de inflexão. (0,1 ponto)

(c) Primeiramente, notemos que devemos ter $x^4 - 4 \neq 0$, ou seja,

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\} = (-\infty, -\sqrt{2}) \cap (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap (\sqrt{2}, +\infty).$$

Logo, $x = \pm\sqrt{2}$ são potenciais candidatos a assíntotas verticais de $f$.

De fato, $\lim_{x \to -\sqrt{2}^-} f(x) = -\infty$, dado que

$$\lim_{x \to -\sqrt{2}^-} -x^4 = -4 < 0 \quad \text{e} \quad x^4 - 4 \to 0 \quad \text{por valores positivos quando} \quad x \to -\sqrt{2}^-.$$

Por outro lado, $\lim_{x \to -\sqrt{2}^+} f(x) = +\infty$, pois

$$\lim_{x \to -\sqrt{2}^+} -x^4 = -4 < 0 \quad \text{e} \quad x^4 - 4 \to 0 \quad \text{por valores negativos quando} \quad x \to -\sqrt{2}^-.$$

Analogamente, $\lim_{x \to \sqrt{2}^+} f(x) = +\infty$, pois

$$\lim_{x \to \sqrt{2}^+} -x^4 = -4 < 0 \quad \text{e} \quad x^4 - 4 \to 0 \quad \text{por valores negativos quando} \quad x \to \sqrt{2}^+.$$

e $\lim_{x \to \sqrt{2}^+} f(x) = -\infty$, pois

$$\lim_{x \to \sqrt{2}^+} -x^4 = -4 < 0 \quad \text{e} \quad x^4 - 4 \to 0 \quad \text{por valores positivos quando} \quad x \to \sqrt{2}^+.$$

Concluímos que $x = \pm\sqrt{2}$ **são assíntotas verticais** de $f$. (0,3 ponto)

Analisemos agora as assíntotas horizontais de $f$. De fato,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} -\frac{x^4}{x^4 - 4} = -\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^4}} = -1.$$

Portanto, $y = -1$ **é assíntota horizontal** de $f$. (0,2 ponto)

(d) Se $\alpha \in (0, 1)$, a equação $f(x) = \alpha$ é equivalente a

$$-\frac{x^4}{x^4 - 4} = \alpha.$$

Assim, $-x^4 = \alpha x^4 - 4\alpha$, ou seja

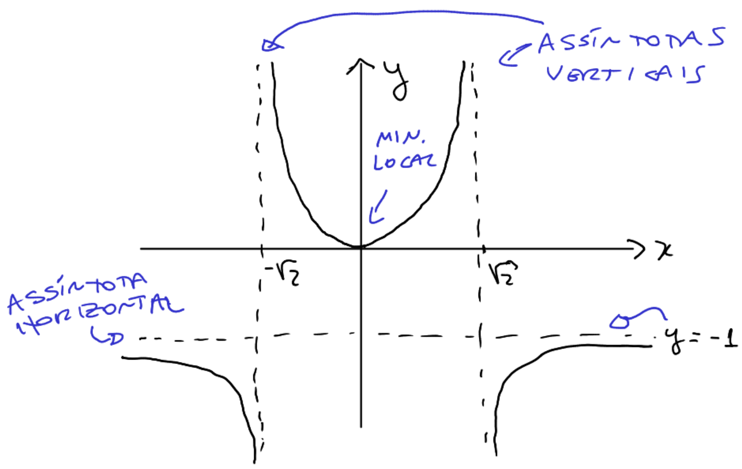
$$(1 + \alpha)x^4 = 4\alpha,$$

portanto tem as soluções

$$x = \pm\sqrt[4]{\frac{4\alpha}{1 + \alpha}}.$$ (0,5 ponto)

Como $\alpha \in (0, 1)$, a raiz está bem definida.

(e) (0,5 ponto)


ASSÍNTOTAS VERTICAIS
y
MIN. LOCAL
x
$-\sqrt{2}$
$\sqrt{2}$
ASSÍNTOTA HORIZONTAL
$y=1$