IMECC/Unicamp
MA111 - Cálculo I
Prova 2
25/05/2023 - 5a feira - noite

RA: ____________ **Nome:** ____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	2	2	3	3	10
Nota:					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

1. Essa prova terá 1h40 de duração.
2. Coloque seu nome e RA em todas as páginas.
3. Não faça uso de telefone celular ou outro recurso eletrônico durante a prova.
4. Não divulgue as questões desta prova por pelo menos 2 dias.
5. Ao entregar a prova, você atesta que não utilizou nenhum meio fraudulento para realizá-la.

As questões da prova começam na próxima página. Esta prova tem 5 questões.

Q1. (2 pontos) Calcule os limites abaixo, justificando todos os passos.

(a) $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}(\pi/x)$

(b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{1-x}$

Solução:

(a) Esta é uma indeterminação do tipo "$0 \cdot \infty$". Vamos reescrever a expressão como

$$x \operatorname{sen}(\pi/x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi/x)}{1/x}.$$

Agora temos uma indeterminação do tipo "0/0" e podemos aplicar o Teorema de L'Hospital. Temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}(\pi/x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi/x)}{1/x} \underbrace{=}_{L'H} \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(\pi/x)\cdot(-\pi\cancel{/x^2})}{-1\cancel{/x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \pi\cos(\pi/x) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

(b) Temos uma indeterminação do tipo "0/0". Podemos aplicar o Teorema de L'Hospital e obter o seguinte resultado.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{-1} = -1.$$

Sugestão de critério de correção:

- (a) 0,5 por reescrever a expressão
- (a) 0,5 calcular corretamente as derivadas e o limite
- (a) -0,2 por erro de conta
- (b) 0,5 por aplicar L'Hospital corretamente
- (b) 0,5 pelo cálculo das derivadas e do limite
- (b) -0,2 por erro de conta

Q2. **(2 pontos)** Se $f(1) = 10$ e $f'(x) \geq 2$ para $1 \leq x \leq 4$, usando o Teorema do Valor Médio, determine o menor valor possível para $f(4)$.

Solução:

Como $f(x)$ é derivável em $[1, 4]$, podemos utilizar o Teorema do Valor Médio para concluir que existe $c \in [1, 4]$ tal que

$$f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1) \geq 2(4 - 1) = 6.$$

Logo $f(4) \geq 6 + 10 = 16$, sendo este o menor valor possível para $f(4)$.

Sugestão de critério de correção:

- 0,5 por utilizar o TVM
- 0,5 por escrever a equação do TVM no caso em particular
- 0,5 por usar a desigualdade
- 0,5 por concluir

Q3. (3 pontos) Considere a curva de equação $x^2 + 2y^2 = 1$.

(a) Calcule dy/dx.

(b) Determine a equação da reta tangente à curva no ponto $(1/3, 2/3)$.

Solução:

(a) Derivando implicitamente com respeito a x, temos $2x + 4yy' = 0$, e portanto

$$y' = -\frac{2x}{4y}.$$

(b) Note que

$$(1/3)^2 + 2(2/3)^2 = 1/9 + 2(4/9) = 1/9 + 8/9 = 1,$$

portanto de fato a curva passa por este ponto. A inclinação da reta tangente à curva pelo ponto $(1/3, 2/3)$ pode ser obtida substituindo estes valores na expressão de y':

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1/3, y=2/3} = -\frac{2(1/3)}{4(2/3)} = -\frac{2/3}{8/3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{4}.$$

A equação da reta será

$$y - 2/3 = (1/4)(x - 1/3),$$

ou seja,

$$y = \frac{x}{4} + \frac{7}{12}.$$

Sugestão de critério de correção:

- (a) 0,5 pela derivada implícita
- (a) 0,5 por isolar dy/dx
- (a) -0,2 por erro de conta
- (b) 1,0 pelo coeficiente angular
- (b) 0,5 pelo termo independente
- (b) 0,5 pela equação correta
- (b) -0,2 por erro de conta

Q4. (3 pontos) Seja $y = f(x) = \dfrac{x}{x^2+9}$.

(a) Determine o domínio de $f(x)$, os pontos de interseção do gráfico de $y = f(x)$ com os eixos e as assíntotas (se houverem).

(b) Determine os intervalos onde $f(x)$ é crescente e decrescente.

(c) Determine os intervalos onde $f(x)$ é côncava para baixo e côncava para cima.

(d) Determine os máximos e mínimos locais de $f(x)$, se existirem.

Dados: $f'(x) = \dfrac{9-x^2}{(x^2+9)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2x\,(x^2-27)}{(x^2+9)^3}$

Solução:

(a) O domínio da função é $\mathbb{R}$, pois é uma função racional e o denominador não se anula. Temos que $f(0) = 0$ e se $f(x) = 0$ então $x = 0$, portanto o gráfico passa pela origem. Além disso, se $x \to \infty$, então $f(x) \to 0$, pois o grau do numerador é menor do que o grau do denominador, daí $y = 0$ é assíntota horizontal.

(b) Para analisar os intervalos onde $f(x)$ é crescente/decrescente, precisamos estudar os intervalos onde a derivada $f'(x)$ é positiva/negativa. Como

$$f'(x) = \frac{9-x^2}{(x^2+9)^2},$$

e o denominador é sempre positivo, resta-nos analisar o numerador. O polinômio $9 - x^2$ é positivo se $x \in (-3, 3)$ e negativo se $x \notin [-3, 3]$. Logo, a função será crescente se $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ e decrescente se $x \in (-3, 3)$.

(c) Para analisar a concavidade, precisamos estudar quando

$$f''(x) = \frac{2x\,(x^2-27)}{(x^2+9)^3}$$

é positiva/negativa.

Como esta função é racional e o denominador é sempre positivo, resta-nos estudar o sinal do numerador, $2x\,(x^2 - 27)$.

- $2x$: positivo se $x > 0$, negativo se $x < 0$
- $x^2 - 27$: positivo se $x < -3\sqrt{3}$ ou $x > 3\sqrt{3}$ e negativo se $-3\sqrt{3} < x < 3\sqrt{3}$.

Portanto, o numerador é positivo se $-3\sqrt{3} < x < 0$ ou se $x > 3\sqrt{3}$, e é negativo se $x < -3\sqrt{3}$ ou $0 < x < 3\sqrt{3}$, com isso temos:

- côncava para cima: $-3\sqrt{3} < x < 0$ ou se $x > 3\sqrt{3}$,
- côncava para baixo: $x < -3\sqrt{3}$ ou $0 < x < 3\sqrt{3}$.

(d) Para determinar os pontos de máximo/mínimo locais, vamos estudar os pontos críticos, que são os zeros de

$$f'(x) = \frac{9-x^2}{(x^2+9)^2}.$$

Estes zeros são $x = \pm 3$. Agora vamos calcular $f''(x)$ nestes pontos, para decidir se são máximos ou mínimos locais.

- $f''(-3) = 1/54 > 0$: mínimo local
- $f''(3) = -1/54 < 0$: máximo local

Sugestão de critério de correção:

- (a) 0,2 pelo domínio, (0,3) pelo intercepto
- (b) 1,0 pela análise completa
- (c) 1,0 pela análise completa
- (d) 0,5 pela análise completa