IMECC/Unicamp
MA111 - Cálculo I
Prova 2
25/05/2023 - 5a feira - tarde

RA: ____________ **Nome:** ____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	2	2	3	3	10
Nota:					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

1. Essa prova terá 1h40 de duração.
2. Coloque seu nome e RA em todas as páginas.
3. Não faça uso de telefone celular ou outro recurso eletrônico durante a prova.
4. Não divulgue as questões desta prova por pelo menos 2 dias.
5. Ao entregar a prova, você atesta que não utilizou nenhum meio fraudulento para realizá-la.

As questões da prova começam na próxima página. Esta prova tem 4 questões.

Q1. **(2 pontos)** Considere a curva de equação $x^2 + xy + y^2 = 1$.

(a) Calcule dy/dx.

(b) Determine todos os pontos na curva que tem reta tangente horizontal.

Solução:

(a) Derivando temos

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0,$$

e daí

$$y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}.$$

(b) Queremos um ponto da curva tal que $y' = 0$. Portanto, devemos ter

$$-\frac{2x + y}{x + 2y} = 0,$$

ou seja,

$$y = -2x.$$

Substituindo na equação da curva, obtemos $3x^2 = 1$, ou seja,

$$x = \pm 1/\sqrt{3}.$$

Portanto, os pontos são $(1/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3})$ e $(-1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$.

Sugestão de critério de correção:

- (a) 0,5 por derivar implicitamente
- (a) 0,5 por isolar corretamente y'
- (a) -0,2 por erro de conta
- (b) 0,4 por usar $y' = 0$ e concluir $y = -2x$
- (b) 0,4 por substituir na eq e chegar no valor de x
- (b) 0,2 por encontrar corretamente os dois pontos

Q2. (2 pontos) Calcule os limites abaixo, justificando todos os passos.

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{2x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{\tan(5x)}$

Solução:

(a) Se tentarmos fazer $x \to -\infty$, teremos uma indeterminação do tipo "$\infty \cdot 0$". Podemos então fazer uma modificação na expressão, obtendo

$$x^2e^{2x} = \frac{x^2}{e^{-2x}}.$$

Agora, se $x \to -\infty$, teremos uma indeterminação do tipo "∞/∞". Como as funções estão dentro das hipóteses do Teorema de L'Hospital, podemos utilizá-lo para calcular o limite. Temos

$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-2x}} \underbrace{=}_{L'H} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-2e^{-2x}} \underbrace{=}_{L'H} \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{4e^{-2x}} = 0.$$

Sugestão de critério de correção:

- (a) 0,4 reescrever como quociente
- (a) 0,3 aplicar l'Hospital pela primeira vez
- (a) 0,3 aplicar l'Hospital pela segunda vez (obtendo o valor correto)
- (a) -0,2 se erro de conta

(b) O limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(4x)}{\tan(5x)}$$

resulta numa indeterminação do tipo "0/0". Usando L'Hospital, temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(4x)}{\tan(5x)} \underbrace{=}_{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{4\cos(4x)}{5\sec^2(5x)} = \frac{4}{5}.$$

Sugestão de critério de correção:

- (b) 0,5 derivar corretamente
- (b) 0,5 aplicar l'Hospital
- (b) -0,2 se erro de conta

Q3. (3 pontos) Determine o ponto $p = (a, b)$ no gráfico de $y = \sqrt{x+2}$ que está mais próximo do ponto $q = (3, 0)$, e determine qual é a distância entre p e q. Faça um esboço gráfico da situação.

Solução: Se (a, b) é um ponto no gráfico de $y = \sqrt{x+2}$, então $b = \sqrt{a+2}$, e daí $(a, b) = (a, \sqrt{a+2})$. A distância de (a, b) até $(3, 0)$ é

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + (\sqrt{x+2})^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (x+2)}.$$

Seja

$$F(x) = d^2 = (x-3)^2 + (x+2).$$

Queremos minimizar a função $d(x)$. O valor de x que minimiza $d(x)$ é o mesmo que minimiza $F(x)$, pois a função $t \mapsto t^2$ é crescente em $[0, \infty)$.

Temos que

$$F'(x) = 2(x-3) + 1$$

e $F' = 0$ se $2(x-3) + 1 = 0$, ou seja, se $x = 5/2$.

Vamos usar o teste da derivada segunda para estudar se este ponto crítico é máximo/mínimo local. Como $F'' = 2$, segue que de fato $x = 5/2$ é um ponto crítico do tipo mínimo local, logo ele realiza a menor distância.

Portanto, o ponto é $p = (5/2, 3/\sqrt{2})$.

A distância é $d(5/2) = \sqrt{19}/2$.

Sugestão de critério de correção:

- 0,5 encontrar a função distância
- 0,5 encontrar o ponto fixo
- 0,5 teste da derivada segunda
- 0,5 encontrar o ponto (não só x)
- 0,5 calcular a distância
- 0,5 esboço da situação

Q4. **(3 pontos)** Seja $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x^3+1}$.

(a) Determine o domínio de $f(x)$ e os pontos de interseção do gráfico de $y = f(x)$ com os eixos.

(b) Determine os intervalos onde $f(x)$ é crescente e decrescente.

(c) Determine os intervalos onde $f(x)$ é côncava para baixo e côncava para cima.

(d) Determine os máximos e mínimos locais de $f(x)$, se existirem.

Dados:

$$f'(x) = \frac{1-2x}{(x^2-x+1)^2}\ , \ f''(x) = \frac{6(x-1)x}{(x^2-x+1)^3}$$

Solução:

(a) O domínio de $y = f(x)$ é $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Note que $f(0) = -1$ e $se f(x) = 0$ então $x = 1$, portanto as interseções com os eixos são $(0, -1)$ e $(1, 0)$. A reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal. Não existem assíntotas verticais.

(b) $f(x)$ será crescente nos intervalos em que $f'(x) > 0$, ou seja, quando $1 - 2x > 0$, ou $x < 1/2$, e decrescente se $x > 1/2$.

(c) Para analisar a concavidade, teremos que estudar quando $f''(x) > 0$ e quando $f''(x) < 0$. Para isso, podemos fazer um estudo do sinal do numerador e do denominador. Note que o denominador de $f''(x)$ é sempre positivo. Portanto, teremos que estudar somente o numerador.

O numerador é positivo se: $x < 0$ ou $x > 1$ (concavidade para cima neste intervalo).

O numerador é negativo se: $0 < x < 1$ (concavidade para baixo neste intervalo).

(d) Note que $x = 1/2$ é o único ponto crítico. Como

$$f''(1/2) = -32/9$$

segue que $x = 1/2$ é ponto de máximo.

Sugestão de critério de correção:

- (a) 0,3 para domínio e 0,2 para pontos de interseção
- (b) 0,5 pelos intervalos
- (c) 1,0 pelos intervalos corretos
- (d) 0,5 pelo ponto crítico
- (d) 0,5 pelo teste da derivada 2a (+conclusão de que é max local)