IMECC/Unicamp
MA111 - Cálculo I
Prova 2
28 de maio - 6a feira - manhã

RA: __________ **Nome:** ____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	2	2	2	4	10
Nota:					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

1. Essa prova terá início às 07h30 do dia 28 de maio de 2021. Você terá duas horas para resolvê-la e mais 30 minutos para preparar um arquivo com sua resolução e enviar através do "Google Sala de Aula".
2. Você deverá escrever a resolução das questões em folhas de papel sulfite branca. Respostas não acompanhadas de argumentos que as confirmem não serão consideradas.
3. Você deverá colocar seu nome, RA e sua assinatura em todas as folhas e numerar as páginas no formato {`página atual`}/{`total de páginas`}. Uma nova questão sempre deve ser iniciada numa página nova, isto é, nenhuma página deve ter partes de mais do que uma questão.
4. A digitalização da prova deve estar suficientemente legível e entregue preferencialmente como um único arquivo `.pdf` com nome no formato `NomeCompleto-RA.pdf`, por exemplo `GottfriedLeibniz-123456.pdf` (sem espaços e/ou acentuação).
5. Caso você tenha algum problema para submeter sua prova pelo "Google Sala de Aula", envie os arquivos escaneados por e-mail para seu professor (dentro do período de realização da prova).
6. **IMPORTANTE:** Na primeira página da sua prova deverá constar a seguinte declaração (manuscrita) e sua assinatura:

   "*Declaro que não estou recebendo ajuda de outras pessoas durante o período de realização da prova, nem faço uso de recursos não permitidos.*
   Comprometo-me a não compartilhar qualquer assunto referente a esta prova por 48h após sua realização."

As questões da prova estão na próxima página.

ATENÇÃO: nas questões abaixo, estamos indicando por:

- A a soma dos dois primeiros dígitos de seu RA,
- B a soma dos três primeiros dígitos do seu RA e
- C a soma de todos os dígitos de seu RA.

Por exemplo,

- se $RA = 12345$, então $A = 1 + 2 = 3$, $B = 1 + 2 + 3 = 6$ e $C = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$,
- se $RA = 987654$, então $A = 9+8 = 17$, $B = 9+8+7 = 24$ e $C = 9+8+7+6+5+4 = 39$.

Use os valores numéricos obtidos a partir de seu RA.

****

Q1. Calcule os limites abaixo.

(a) (**1 ponto**) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{C\sin x}$

(b) (**1 ponto**) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 \tan\left(\dfrac{B}{x^3}\right)$

Solução:

(a) Quando $x \to 0^+$, temos uma indeterminação do tipo "0^0". Para simplificar a expressão, seja $y = x^{C\sin x}$. Então

$$\ln(y) = \ln(x^{C\sin x}),$$

ou seja,

$$\ln(y) = (C\sin x)\ln(x). \text{ (0,2 ponto)}$$

Calculando limite com $x \to 0^+$ na expressão anterior, temos

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(y) = \lim_{x\to 0^+} (C\sin x)\ln(x).$$

O limite do lado direito resulta em $0\cdot\infty$, outra indeterminação. Podemos reescrever o limite anterior como

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(y) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\dfrac{1}{C\sin x}} = C \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\dfrac{1}{\sin x}} \text{(0,2 ponto)}$$

e agora temos uma indeterminação do tipo "∞/∞" do lado direito. Como as funções são contínuas para $x > 0$, podemos usar o Teorema de L'Hospital para calcular esse limite. (0,2 ponto)

Como $(\ln(x))' = 1/x$ e $\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)' = -\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}\dfrac{1}{\sin x}$, ficamos com

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(y) = -C \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)\tan(x)}{x}.$$

Novamente temos uma indeterminação do tipo "0/0". Como ainda estamos nas hipóteses para usar o Teorema de L'Hospital, obtemos

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(y) = -C \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)\tan(x)}{x} = -C \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x) + \sec(x)\tan(x)}{1} = 0.$$ (0,2 ponto)

Como

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(y) = 0,$$

segue que

$$\ln\left(\lim_{x\to 0^+} y\right) = 0,$$

e com isso

$$\lim_{x\to 0^+} y = e^0 = 1,$$

que é a resposta que procurávamos. (0,2 ponto)

(b) Quando $x \to \infty$ temos uma indeterminação do tipo "$0 \cdot \infty$", que pode se tornar uma indeterminação do tipo "∞/∞" se fizermos a simplificação

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \tan\left(\frac{B}{x^3}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\tan\left(\frac{B}{x^3}\right)}{1/x^2}.$$ (0,5 ponto)

Como as funções estão nas hipóteses do Teorema de L' Hospital, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x^2 \tan\left(\frac{B}{x^3}\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\tan\left(\frac{B}{x^3}\right)}{1/x^2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\dfrac{3B\sec^2(B/x^3)}{x^4}}{-2/x^3} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3B\sec^2(B/x^3)}{2x} \\
&= 0,
\end{aligned}$$ (0,5 ponto)

pois $B/x^3 \to 0$ quando $x \to \infty$ e $\sec(0) = 1$.

Q2. **(2 pontos)** Determine os pontos sobre a parábola $y = x^2 + 1$ que estão mais próximos e distantes do ponto $P = (0, 3)$ para $x \in [-2, 2]$. Qual é a menor distância? E a maior distância? Faça um desenho representando todos os pontos envolvidos.

Solução: Queremos encontrar os mínimo/máximo da função distância entre os ponto da parábola $y = x^2 + 1$ e o ponto $\mathrm{P} = (0, 3)$.

Sabemos que a distância entre dois pontos $\mathrm{A} = (a_1, a_2)$ e $\mathrm{B} = (b_1, b_2)$ é dada por

$$d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

Em nosso caso, consideraremos $\mathrm{A} = (x, y) = (x, x^2 + 1)$ um ponto sobre a parábola $y = x^2 + 1$ e $\mathrm{B} = (0, 3)$. Então, podemos re-escrever a função distância como

$$d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{x^2 + (x^2 - 2)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4} = d(x)$$

Nesse ponto, notamos que achar os mínimos/máximos da função $d(x)$ são so mesmos que encontrar os mínimos/máximos da função $f(x) = d^2(x)$. Logo, devemos encontrar os mínimos/máximos da função $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 4 \text{ (0,5 ponto)}$$

Como f é uma função contínua em $[-2, 2]$, pelo Teorema do Valor Extremo (Teo de Weierstrass), f assume seus valores de máximo e mínimos absolutos em $[-2, 2]$.

Derivando e calculando os seus pontos críticos em $(-2, 2)$, obtemos que

$$0 = f'(x) = 4x^3 - 6x = x(2x^2 - 6) \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ (0,5 ponto)}$$

Agora, $f''(x) = 12x^2 - 6$. Então pelo Teste da Derivada Segunda temos que

1. $f''(0) = -6 < 0$. Logo, $x = 0$ é um máximo local de f e $f(0) = 4$.
2. $f''\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 12.\frac{6}{4} - 6 = 12 > 0$. Logo, $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ são mínimos locais de f e $f\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{7}{4}$.

Por fim, precisamos averiguar os valores que f assume nos extremos do intervalo $[-2, 2]$:

$$f(\pm 2) = (\pm 2)^4 - 3(\pm 2)^2 + 4 = 16 - 12 + 4 = 8.$$

Portanto, os mínimos absolutos de f são assumidos em $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ e os máximos absolutos de f são assumidos em $x = \pm 2$. (0,5 ponto)

Concluímos então que os pontos sobre a parábola $y = x^2 + 1$ que estão mais próximos e distantes do ponto $\mathrm{P} = (0, 3)$ (para $x \in [-2, 2]$) são $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ e $x = \pm 2$ respectivamente. (0,5 ponto)

Q3. Considere a curva dada pela equação

$$(x - A)^2 y^3 + x(y - B) + x = A.$$

(a) **(0,5 pontos)** Mostre que o ponto (A, B) pertence à curva.

(b) **(1,5 pontos)** Encontre a equação da reta tangente à curva dada no ponto (A, B).

Solução:

(a) Basta ver que, substituindo $x = A$ e $y = B$ na equação, obtemos uma identidade. (0,5 ponto)

(b) Vamos derivar a expressão

$$(x - A)^2 y^3 + xy - xB + x = A$$

implicitamente com respeito a x:

$$2(x - A)y^3 + 3(x - A)^2 y^2 \frac{dy}{dx} + y + x\frac{dy}{dx} - B = 0,$$

ou seja

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2Ay^3 + B - 2xy^3 - y - 1}{3A^2y^2 - 6Axy^2 + 3x^2y^2 + x}. \text{ (0,5 ponto)}$$

Substituindo em $x = A$ e $y = B$, temos que

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=A, y=B} = -\frac{1}{A}. \text{ (0,5 ponto)}$$

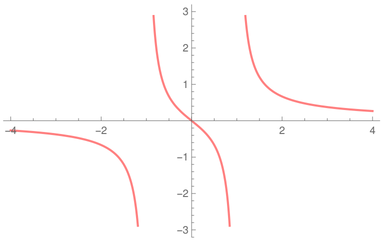
Assim, a equação da reta é

$$y - B = -\frac{1}{A}(x - A). \text{ (0,5 ponto)}$$

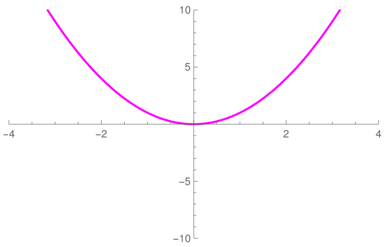
Q4. **(4 pontos)** Associe cada gráfico à sua função, escrevendo uma breve justificativa, seguindo o exemplo.

Gráficos:

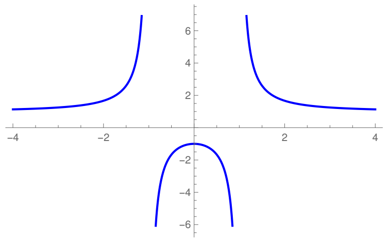
A1



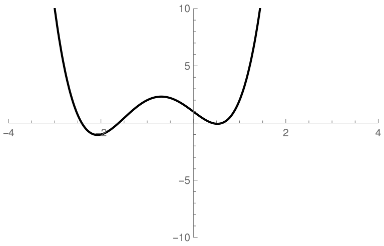
A2



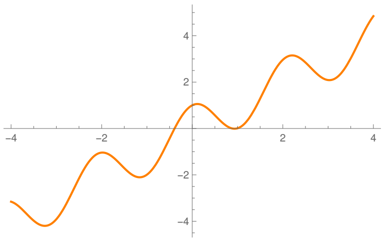
A3



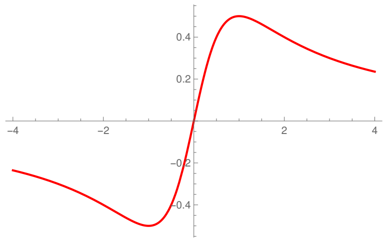
A4



A5



A6



Funções e suas derivadas:

$f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)}$	$g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$	$h(x) = x + \cos(3x)$
$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$	$g'(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$	$h'(x) = 1 - 3\sin(3x)$
$p(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$	$q(x) = x^4 + 3x^3 - 3x + 1$	$m(x) = x^2$
$p'(x) = -\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$	$q'(x) = -3 + 9x^2 + 4x^3$	$m'(x) = 2x$

Exemplo de resposta/associação:

A função $m(x)$ está associada ao gráfico **A2**. Note que $m'(x) = 2x$ e $m''(x) = 2$, portanto a função só tem um ponto crítico em $x = 0$. Esse ponto crítico é mínimo local pois $m''(0) > 0$. A função é decrescente para $x < 0$ e crescente para $x > 0$. Além disso, a função não tem assíntotas e a concavidade é sempre para cima (pois $m''(x) > 0$ sempre).

Sua argumentação deve estar baseada em pontos críticos, crescimento/decrescimento, concavidades e assíntotas.

Solução:

- A função $y = f(x)$ possui como pontos críticos $x = \pm 1$, e não possui nenhuma assíntota (o denominador é sempre diferente de zero). Ela é decrescente para $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ e crescente para $x \in (-1, 1)$. Por tudo isso, o gráfico de $y = f(x)$ só pode ser A6.

- A função $y = g(x)$ tem uma assíntota horizontal no $y = 1$. Além disso, tem assíntotas verticais em $x = \pm 1$ e um ponto crítico em $x = 0$. A única possibilidade é seu gráfico ser A3.
- A função $y = h(x)$ tem infinitos pontos críticos, localizados nos pontos x tais que $\sin(3x) = 1/3$. Como $h''(x) = -9\cos(3x)$, os pontos críticos alternam máximo e mínimos locais. O gráfico não tem nenhuma assíntota. A única possibilidade é o gráfico A5.
- A função $y = p(x)$ tem assíntotas verticais em $x = \pm 1$, e não tem pontos críticos no domínio, pois $f'(x) < 0$ sempre (onde está definida). Em particular isso significa que a função é sempre decrescente nos intervalos em que está definida. Por isso, a única possibilidade é o gráfico A1.
- A função $y = q(x)$ é um polinômio, portanto seu domínio é $\mathbb{R}$. A derivada tem pelo menos um ponto crítico, já que é um polinômio de grau 3. Como $q''(x) = 18x + 12x^2$ temos que $q''(x) < 0$ para $x \in (-3/2, 0)$ e $q''(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -3/2) \cup (x, \infty)$, o que nos explica a concavidade do gráfico. Assim, a única possibilidade é o gráfico A4.
- Já vimos que $m(x)$ está associada ao gráfico A2.

  Recomendação: (0,8 ponto) por cada associação/argumentação correta.