IMECC/Unicamp
MA111 - Cálculo I
Prova 2
28 de maio - 6a feira - noite

RA: ____________ **Nome:** ____

Questão:	Q1	Q2	Q3	Q4	Total:
Valor:	2	2,5	2,5	3	10
Nota:					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

1. Essa prova terá início às 18h30 do dia 28 de maio de 2021. Você terá duas horas para resolvê-la e mais 30 minutos para preparar um arquivo com sua resolução e enviar através do “Google Sala de Aula”.

2. Você deverá escrever a **resolução detalhada** das questões em folhas de papel sulfite branca. Respostas não acompanhadas de argumentos que as confirmem não serão consideradas.

3. Você deverá colocar seu nome, RA e sua assinatura em todas as folhas e numerar as páginas no formato {`página atual`}/{`total de páginas`}. Uma nova questão sempre deve ser iniciada numa página nova, isto é, nenhuma página deve ter partes de mais do que uma questão.

4. A digitalização da prova deve estar suficientemente legível e entregue preferencialmente como um único arquivo `.pdf` com nome no formato `NomeCompleto-RA.pdf`, por exemplo `GottfriedLeibniz-123456.pdf` (sem espaços e/ou acentuação).

5. Caso você tenha algum problema para submeter sua prova pelo “Google Sala de Aula”, envie os arquivos escaneados por e-mail para seu professor (dentro do período de realização da prova).

6. **IMPORTANTE:** Na primeira página da sua prova deverá constar a seguinte declaração (manuscrita) e sua assinatura:

   “*Declaro que não estou recebendo ajuda de outras pessoas durante o período de realização da prova, nem faço uso de recursos não permitidos.*
   Comprometo-me a não compartilhar qualquer assunto referente a esta prova por 48h após sua realização.”

As questões da prova estão na próxima página.

Q1. Avalie os limites abaixo e encontre seus valores, caso existam:

(a) **(1 ponto)** $\lim_{x\to\infty} e^{-5x}\ln(2x)$

(b) **(1 ponto)** $\lim_{x\to 0^+} x^{(x^{1/4})}$

Solução:

(a) Reescrevendo o limite como

$$\lim_{x\to\infty} e^{-5x}\ln(2x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2x)}{e^{5x}}$$

percebemos que temos uma indeterminação do tipo "∞/∞". (0,5 ponto)

Como as funções envolvidas estão nas hipóteses do Teorema de L'Hospital, podemos usar este teorema para transformar o limite acima em

$$\lim_{x\to\infty} e^{-5x}\ln(2x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2x)}{e^{5x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{5e^{5x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{5xe^{5x}} = 0, \quad \text{(0,5 ponto)}$$

pois $5xe^{5x} \to \infty$ quando $x \to \infty$.

(b) Neste limite temos uma indeterminação do tipo "0^0". Seja $y = x^{(x^{1/4})}$. Então

$$\ln(y) = \ln\left(x^{(x^{1/4})}\right) = x^{1/4}\ln(x).$$

Calculando limite na expressão, temos

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(y) = \lim_{x\to 0^+} x^{1/4}\ln(x).$$

Do lado direito temos uma indeterminação do tipo "$0\cdot(-\infty)$". Vamos reescrever o limite de outra fora:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(y) = \lim_{x\to 0^+} x^{1/4}\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x^{1/4}}.$$

Agora temos uma indeterminação do tipo "$\infty/(-\infty)$", e como as funções satisfazem as condições do Teorema de L'Hospital (0,5 ponto), podemos fazer

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(y) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x^{1/4}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/(4x^{5/4})} = -4\lim_{x\to 0^+} x^{1/4} = 0.$$

Portanto

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(y) = 0,$$

e daí

$$\ln\left(\lim_{x\to 0^+} y\right) = 0,$$

ou seja, $\lim_{x\to 0^+} y = 1$. (0,5 ponto)

Q2. Considere a curva definida pela equação $x^4 - y^4 + 12xy = 7$.

(a) **(1,5 pontos)** Calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

(b) **(1 ponto)** Encontre a equação da reta tangente à curva no ponto $(2, 3)$.

Solução:

(a) Derivando implicitamente a expressão, temos

$$4x^3 - 4y^3\frac{dy}{dx} + 12y + 12x\frac{dy}{dx} = 0, \text{ (1,0 ponto)}$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-12y - 4x^3}{12x - 4y^3}. \text{ (0,5 ponto)}$$

(b) O coeficiente angular da reta tangente no ponto $(2, 3)$ é dado por

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(2,3)} = \frac{17}{21}. \text{ (0,5 ponto)}$$

Assim, a equação da reta é

$$y - 3 = \frac{17}{21}(x - 2). \text{ (0,5 ponto)}$$

Q3. (2,5 pontos) Encontre o ponto sobre a curva $y = 3/x$ (definida para $x > 0$) que está mais próximo da origem.

Solução: Vamos definir uma função que mede a distância da origem até um ponto no gráfico de $y = 3/x$:

$$d(x) = \sqrt{x^2 + 9/x^2},\ \ x > 0. \text{ (0,5 ponto)}$$

Vamos trabalhar com a função $f(x) = d(x)^2$ para encontrar o valor de x que minimiza esta distância, ou seja, queremos obter o valor de $x > 0$ que torna mínima a função

$$f(x) = x^2 + \frac{9}{x^2}.$$

Como $f'(x) = 2x - \dfrac{18}{x^3}$, o único ponto crítico positivo é $x = \sqrt{3}$. (0,5 ponto)

Como $f''(x) = 2 + 54/x^4 > 0$ para todo $x > 0$, segue que existe um mínimo local em $x = \sqrt{3}$, e daí o ponto crítico $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ é um mínimo local (0,5 ponto). Sendo o único ponto crítico, ele precisa ser um mínimo global. (1,0 ponto)

A menor distância é $d(\sqrt{3}) = \sqrt{6}$.

Q4. Seja $f(x) = xe^x$.

(a) **(1 ponto)** Determine os intervalos de crescimento/decrescimento de f, e os seus pontos de máximo/mínimo.

(b) **(1 ponto)** Determine os intervalos onde f é côncava para cima/baixo e os seus pontos de inflexão.

(c) **(0,5 pontos)** Caso existam, encontre as assíntotas horizontais e verticais de f.

(d) **(0,5 pontos)** Esboce o gráfico de f usando (pelo menos) as informações obtidas nos itens (a), (b) e (c), justificando.

Solução: Note que o domínio desta função é o conjunto dos números reais.

(a) Como $f'(x) = (x+1)e^x$, o único ponto crítico é $x = -1$.

Se $x < -1$ a derivada é negativa e se $x > -1$ a derivada é positiva, portanto a função é decrescente para $x < -1$ e crescente para $x > 1$. (0,5 ponto)

Como $f''(x) = (x+2)e^x$, segue que $f''(-1) > 0$, portanto o ponto crítico é um mínimo local. (0,5 ponto)

(b) Novamente usando que $f''(x) = (x+2)e^x$ e temos $f''(x) < 0$ para $x < -2$, $f''(x) > 0$ para $x > -2$, segue que a função é côncava para cima quando $x > -2$ e côncava para baixo se $x < -2$. (0,5 ponto)

Em $x = -2$ temos um ponto de inflexão. (0,5 ponto)

(c) Como a função é contínua em $\mathbb{R}$, não existem assíntotas verticais. (0,2 ponto)

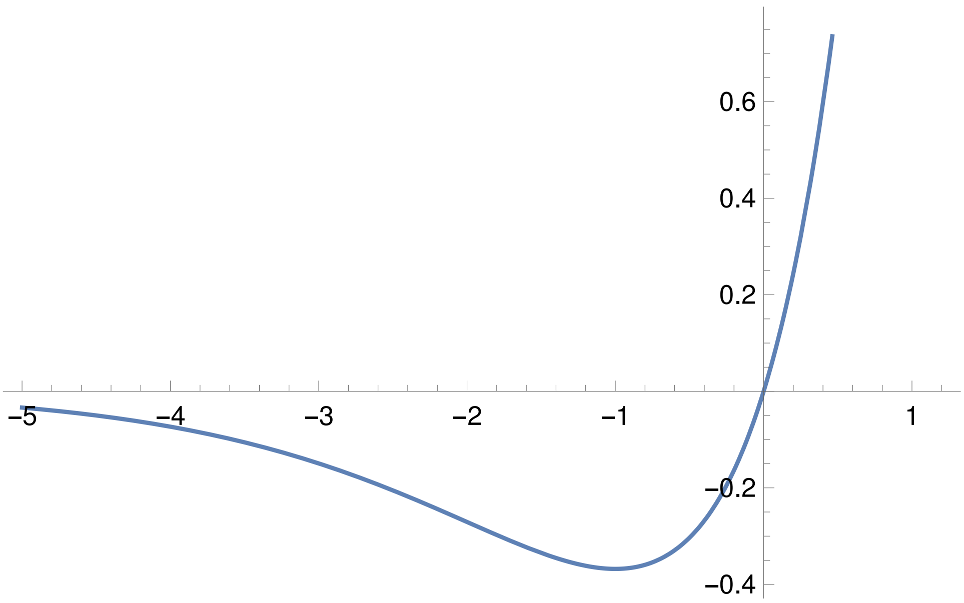
Note porém que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,$$

portanto $y = 0$ é uma assíntota horizontal. (0,3 ponto)



(d) (0,5 ponto)