IMECC/Unicamp
MA111 - Cálculo I
Prova 2
26/05/2023 - 6a feira - manhã

RA: ____________ **Nome:** ____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	2	2	3	3	10
Nota:					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

1. Essa prova terá 1h40 de duração.
2. Coloque seu nome e RA em todas as páginas.
3. Não faça uso de telefone celular ou outro recurso eletrônico durante a prova.
4. Não divulgue as questões desta prova por pelo menos 2 dias.
5. Ao entregar a prova, você atesta que não utilizou nenhum meio fraudulento para realizá-la.

As questões da prova começam na próxima página. Esta prova tem 4 questões.

Q1. **(2 pontos)** Considere a curva de equação $x\cos(\pi y) + y\cos(\pi x) - xy = -3$.

(a) Calcule dy/dx.

(b) Determine a equação da reta tangente à curva no ponto $(1, 1)$.

Solução:

a) A derivada implícita da curva dada fornece

$$1\cdot\cos(\pi y)\checkmark - x\sin(\pi y)\checkmark\cdot\pi\checkmark y'\checkmark + y'\cos(\pi x)\checkmark - y\sin(\pi x)\checkmark\cdot\pi\checkmark - y\checkmark - xy'\checkmark = 0\checkmark,$$

ou seja,

$$(\cos(\pi y) - \pi y\sin(\pi x) - y)\checkmark + y'\cdot(\cos(\pi x) - \pi x\sin(\pi y) - x)\checkmark = 0,$$

da qual

$$y'(x,y) = \frac{\pi y\sin(\pi x) - \cos(\pi y) + y}{\cos(\pi x) - \pi x\sin(\pi y) - x}\checkmark.$$

b) No ponto $(1, 1)$, temos então

$$y'(1,1) = \frac{\pi\cdot 1\cdot\sin(\pi) - \cos(\pi) + 1\checkmark}{\cos(\pi) - \pi\cdot 1\cdot\sin(\pi) - 1\checkmark} = \frac{\pi\cdot 0 - (-1) + 1}{-1 - \pi\cdot 0 - 1}\checkmark = -1\checkmark.$$

Assim, a reta tangente é dada por

$$\frac{y-1}{x-1}\checkmark = -1\checkmark \Rightarrow y = -x + 2\checkmark.$$

Q2. (2 pontos) Calcule os limites abaixo, justificando todos os passos.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 e^{-x^2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

Solução:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 e^{-x^2} = \text{“}\infty \cdot 0\text{”} \checkmark$

Podemos colocar o fator exponencial no denominador, escrevendo

$\lim\limits_{x\to\infty} x^3 e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{e^{x^2}} \checkmark = \text{“}\dfrac{\infty}{\infty}\text{”} \checkmark.$

Aplicando L'Hospital, obtemos

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{e^{x^2}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 \checkmark}{e^{x^2} \cdot 2x \checkmark} = \dfrac{3}{2} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^{x^2}} \checkmark = \text{“}\dfrac{\infty}{\infty}\text{”} \checkmark.$

Aplicando novamente L'Hospital, obtemos

$\dfrac{3}{2} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^{x^2}} \overset{\text{L'H}}{=} \dfrac{3}{2} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^{x^2} \cdot 2x} \checkmark = \text{“}\dfrac{1}{\infty \cdot \infty}\text{”} \checkmark = 0 \checkmark.$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} = \text{“}\dfrac{0}{0}\text{”} \checkmark.$

Aplicando L'Hospital, obtemos

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 0 - 1 \checkmark}{2x \checkmark} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} \checkmark = \text{“}\dfrac{0}{0}\text{”} \checkmark.$

Aplicando novamente L'Hospital, obtemos

$\dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 0 \checkmark}{1 \checkmark} = \dfrac{1}{2} \underbrace{\lim\limits_{x\to 0} e^x}_{=1 \checkmark} \checkmark = \dfrac{1}{2} \checkmark$

Q3. **(3 pontos)** (a) (1,0 ponto) Qual é a distância vertical mínima entre as parábolas $y = x^2 + 1$ e $y = x - x^2$?

(b) (0,5 ponto) Calcule $g'(1)$, para $g(x) = \dfrac{x}{1 + \operatorname{sen}(\pi x)}$.

(c) (1,0 ponto) Determine todos os pontos do gráfico de $y = 1 - x^3 + x^2$ em que a reta tangente seja paralela à reta $y + x = 0$, e para cada um dos pontos encontrados, calcule a reta tangente que passa por esse ponto.

Dados: $\operatorname{sen}(\pi) = 0$, $\cos(\pi) = -1$.

Solução:

a) A distância vertical entre as parábolas é dada pela diferença entre as duas, i.e., $d(x) = x^2 + 1 - (x - x^2)✓ = 2x^2 - x + 1✓$.
O intervalo de busca é $(\infty, \infty)✓$.
Notamos que a derivada $d'(x) = 4x - 1✓$ tem um único ponto crítico onde $4x - 1 = 0✓$, i.e., em $x = 1/4✓$, uma vez que ela existe $\forall\, x \in I\!R✓$.
Este ponto crítico é um mínimo relativo✓, pois $d''(x) = 4✓ \ \Rightarrow\ d''(1/4) = 4✓ > 0✓$.
Por ser o único extremo no interior do intervalo de busca✓, concluímos que este ponto representa o mínimo absoluto✓ que procuramos. Neste ponto, a distância assume o valor de $d(1/4) = 2\left((\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1✓ = \frac{2}{16} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{1 - 2 + 8}{8} = \frac{7}{8}✓$

b) Pela Regra do Quociente, obtemos

$$g'(x) = \frac{1 \cdot [1 + \sin(\pi x)]✓ - x \cdot [0 + \cos(\pi x) \cdot \pi]✓}{[1 + \sin(\pi x)]^2✓} = \frac{1 + \sin(\pi x) - \pi x \cos(\pi x)}{[1 + \sin(\pi x)]^2}$$

Assim, obtemos

$$g'(1) = \frac{1 + \sin(\pi) - \pi \cdot 1 \cdot \cos(\pi)}{[1 + \sin(\pi)]^2}✓ = \frac{1 + 0 - \pi \cdot 1 \cdot (-1)}{(1 + 0)^2} = 1 + \pi✓$$

c) A reta $y + x = 0$, ou seja, $y = -x$, tem a inclincação $y' = -1✓$.
O gráfico $y = 1 - x^3 + x^2$ tem a inclinação dada por $y' = -3x^2 + 2x✓$.
Igualando as inclinações, temos $-3x^2 + 2x = -1✓ \ \Rightarrow\ 3x^2 - 2x - 1 = 0$ o que implica que $x = 1$ (pois $3 - 2 - 1 = 0$) ou $x = \frac{-1}{1 \cdot 3} = -\frac{1}{3}✓$.
Em $x = 1$, temos $y = 1 - 1 + 1 = 1✓$ e, portanto, $-1 = \frac{y - 1}{x - 1}✓$, ou seja, $y - 1 = -x + 1 \ \Rightarrow\ y = -x + 2✓$
Em $x = -\frac{1}{3}$, temos $y = 1 + \frac{1}{27} + \frac{1}{9} = \frac{31}{27}✓$ e, portanto, $-1 = \frac{y - 31/27}{x + 1/3}✓$, ou seja, $y - \frac{31}{27} = -x - \frac{1}{3} \ \Rightarrow\ y = -x + \frac{22}{27}✓$

Q4. (3 pontos) Seja $y = f(x) = xe^{-x}$.

(a) Determine o domínio de $f(x)$, os pontos de interseção do gráfico de $y = f(x)$ com os eixos e as assíntotas (se houverem).

(b) Determine os intervalos onde $f(x)$ é crescente e decrescente.

(c) Determine os intervalos onde $f(x)$ é côncava para baixo e côncava para cima.

(d) Determine os máximos e mínimos locais de $f(x)$, se existirem.

(e) Esboce o gráfico de $y = f(x)$.

Solução: Inicialmente, derivamos a função para encontrar
$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + xe^{-x} \cdot (-1)\checkmark = (1-x)e^{-x}\checkmark$
e $f''(x) = -1 \cdot e^{-x} + (1-x)e^{-x} \cdot (-1)\checkmark = (x-2)e^{-x}\checkmark$

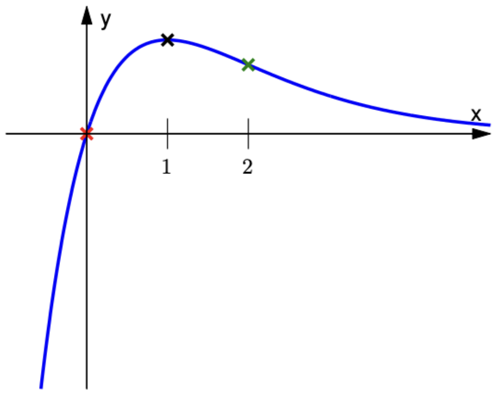
a) Uma vez que f é o produto de uma função polinomial com uma função exponencial, que podem ser calculados para todo $x \in \mathbb{R}$, concluímos que $\mathbb{D} - \mathbb{R}\checkmark$.
Interceptos: Ordenada: $f(0) = 0e^{-0} = 0\checkmark$.
Abscissa: $f(x) = xe^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0\checkmark$. Assim, o gráfico da função intersecciona ambos os eixos somente em $(0, 0)\checkmark$.
Como f é contínua em $\mathbb{R}$, ela não possui assíntotas verticais$\checkmark$.
Para verificar se tem assíntotas horizontais, precisamos calcular os limites para $x \to \pm\infty$. Temos
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}\checkmark \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x}\checkmark = 0\checkmark$
Portanto, a reta $y = 0$ é assíntota horizontal de f quando $x \to \infty\checkmark$.
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = \text{“}-\infty \cdot \infty\text{”} = -\infty\checkmark$
Portanto, a função não possui assíntota horizontal quando $x \to -\infty\checkmark$.
Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, avaliamos o limite para x decrescente da derivada, para verificar se a função tem uma assíntota oblíqua:
$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} (1-x)e^{-x} = \text{“}\infty \cdot \infty\text{”} = \infty\checkmark$
Portanto, a função não possui assíntota oblíqua quando $x \to -\infty\checkmark$.

b) Temos $f'(x) = (1-x)e^{-x} = 0$ somente em $x = 1$, sendo $f'x(x)\exists\ \forall\ x \in \mathbb{R}\checkmark$. Com $f'(0) = 1 > 0\checkmark$ e $f'(2) = -e^{-2} < 0\checkmark$, concluímos que f é crescente em $(-\infty, 1)\checkmark$e decrescente em $(1, \infty)\checkmark$.

c) Temos $f''(x) = (x-2)e^{-x} = 0$ somente em $x = 2$, sendo $f''x(x)\exists\ \forall\ x \in \mathbb{R}\checkmark$. Com $f''(0) = -2 < 0\checkmark$ e $f'(3) = e^{-3} > 0\checkmark$, concluímos que f é côncava para baixo em $(-\infty, 2)\checkmark$e côncava para cima em $(2, \infty)\checkmark$.

d) Uma vez que verificamos no item (b) que a função troca de monotonia de crescente para descrescente$\checkmark$em $x = 1$, podemos concluir que f possui um máximo local$\checkmark$em $x = 1\checkmark$, com $y = 1e^{-1} = 1/e\checkmark$.

e)



$\times$: Intercepto (0,0),
$\times$: Máximo $(1{,}1/e)$,
$\times$: Ponto de inflexão $(2{,}2/e^2)$
Assíntota horizontal $y = 0$ para $x \to \infty$