IMECC/Unicamp
MA111 - Cálculo I
Prova 2
26/05/2023 - 6a feira - noite

RA: ____________ **Nome:** ____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	2	2	3	3	10
Nota:					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

1. Essa prova terá 1h40 de duração.
2. Coloque seu nome e RA em todas as páginas.
3. Não faça uso de telefone celular ou outro recurso eletrônico durante a prova.
4. Não divulgue as questões desta prova por pelo menos 2 dias.
5. Ao entregar a prova, você atesta que não utilizou nenhum meio fraudulento para realizá-la.

As questões da prova começam na próxima página. Esta prova tem 5 questões.

Q1. **(2 pontos)** Considere a curva de equação $xy + y^5 + 1 = x^2$.

(a) Calcule dy/dx.

(b) Determine a equação da reta tangente à curva no ponto $(1, 0)$.

Solução:

(a) Derivando implicitamente, temos

$$y + xy' + 6y^4y' = 2x.$$

Isolando y' temos

$$y' = \frac{2x - y}{x + 6y^4}.$$

(b) A inclinação da reta tangente no ponto $(1, 0)$ é dada substituindo $x = 1$ e $y = 0$ na expressão que obtemos para y'. Portanto, a inclinação é $y'(1, 0) = 2$. A equação da reta será $y - 0 = 2(x - 1)$, ou seja,

$$y = 2x - 2.$$

Sugestão de critério de correção:

- (a) 0,5 por derivar implicitamente
- (a) 0,5 por isolar y'
- (b) 0,5 por achar a inclinação corretamente
- (b) 0,5 por achar a eq da reta corretamente

Q2. (2 pontos) Calcule os limites abaixo, justificando todos os passos.

(a) $\lim_{t\to 0} \dfrac{8^t - 5^t}{t}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{5x}$

Solução:

(a) Se tentarmos avaliar o limite em $t = 0$, teremos uma indeterminação do tipo "0/0". Podemos então aplicar o Teorema de L'Hospital, e obter

$$\lim_{t\to 0} \frac{8^t - 5^t}{t} = \lim_{t\to 0} (8^t \ln(8) - 5^t \ln(5)) = \ln(8) - \ln(5) = \ln(8/5).$$

(b) Se tentarmos avaliar o limite com $x \to \infty$, obteremos uma indeterminação do tipo 1^∞. Podemos então reescrever

$$y = \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{5x},$$

e daí ao calcularmos ln em ambos os lados obtemos

$$\ln(y) = 5x \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$

Fazendo $x \to \infty$ teremos

Sugestão de critério de correção:

- (a) 0,5 por derivar implicitamente
- (a) 0,5 por isolar y'
- (b) 0,5 por achar a inclinação corretamente
- (b) 0,5 por achar a eq da reta corretamente

Q3. (3 pontos) Determine a área do retângulo de maior área que pode ser inscrito em um triângulo retângulo com catetos de comprimento 3 e 4, considerando que dois lados do retângulo estão sobre os catetos do triângulo. Faça um desenho ilustrando a situação.

Solução: Considere, no plano cartesiano, um triângulo retângulo com vértices nos pontos $(0,0)$, $(3,0)$ e $(0,4)$.

Suponha que os vértices do retângulo estejam nos pontos $(0,0)$, $(x,0)$, $(0,y)$ e (x,y). Assim, temos $0 < x \leq 3$ e $0 < y \leq 4$.

A área do retângulo é dada por $A = xy$.

Como o ponto (x,y) está na hipotenusa do triângulo retângulo, e a hipotenusa está na reta $y = -(4/3)x + 4$, temos que a área pode ser dada somente em termos de x, como

$$A(x) = x \cdot (4 - 4x/3).$$

Queremos o maior valor de $A(x)$, então vamos calcular $A'(x)$:

$$A'(x) = 4 - 8x/3.$$

Note que se $A'(x) = 0$ então $x = 3/2$. Além disto, como $A''(x) = -8/3$, este ponto crítico é um ponto de máximo.

Assim, a área máxima é $A(3/2) = 3$.

Sugestão de critério de correção:

- (a) 1,0 por encontrar a função $A(x,y)$
- (a) 0,5 por encontrar $A(x)$
- (a) 0,5 por achar o ponto crítico
- (b) 0,5 por verificar que ele de fato é de máximo local.
- (b) 0,5 pela figura

Q4. (3 pontos) Seja $y = f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

(a) Determine o domínio de $f(x)$, os pontos de interseção do gráfico de $y = f(x)$ com os eixos e as assíntotas (se houverem).

(b) Determine os intervalos onde $f(x)$ é crescente e decrescente.

(c) Determine os intervalos onde $f(x)$ é côncava para baixo e côncava para cima.

(d) Determine os máximos e mínimos locais de $f(x)$, se existirem.

Solução:

(a) A função $f(x)$ é uma função racional, portanto o domínio é o conjunto dos $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq 0$, ou seja, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Isto implica que não existe interseção com o eixo y. Como a equação $f(x) = 0$ não tem solução, também não existe interseção com o eixo x. A reta $x = 0$ é uma assíntota vertical, o que pode ser comprovado pelos limites

- $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} + x\right) = -\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} + x\right) = +\infty$

Note que existe ainda uma assíntota vertical: a reta $y = x$, mas não era necessário encontrá-la.

(b) Temos que $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$. Lembrando que se $f'(x) > 0$ a função $f(x)$ será crescente, e se $f'(x) < 0$ a função $f(x)$ será decrescente, temos que:

- $f'(x) > 0$ se $x > 1$ ou $x < -1$ (f crescente)
- $f'(x) < 0$ se $-1 < x < 1$ (f decrescente)

(c) Para estudar os intervalos em que $f(x)$ é côncava para cima/para baixo, precisamos da segunda derivada: $f''(x) = 2/x^3$. Assim, $f(x)$ será côncava para cima se $x > 0$ e côncava para baixo de $x < 0$.

(d) Os máximos e mínimos locais ocorrerão nos pontos críticos. Como $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$, temos que $f'(x) = 0$ quando $x = \pm 1$.

Calculando $f''(x)$ nestes pontos críticos, temos que:

- $f''(-1) = -2 < 0$ (máximo local)
- $f''(1) = 2 < 0$ (mínimo local)

Sugestão de critério de correção:

- (a) 0,2 pelo domínio, 0,3 pela assíntota
- (b) 0,3 pela derivada, 0,5 pela análise
- (c) 0,3 pela derivada segunda, 0,5 pela análise
- (d) 0,3 por encontrar ambos os pontos críticos

- (d) 0,6 pelo teste da derivada 2a para concluir que é max/min
- -0,2 por erros de conta