IMECC/Unicamp
MA111 - Cálculo I
Prova 3
29/06/2023 - 5a feira - noite

RA: ____________ **Nome:** ____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	2	2	3	3	10
Nota:					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

1. Essa prova terá 1h40 de duração.
2. Coloque seu nome e RA em todas as páginas.
3. Não faça uso de telefone celular ou outro recurso eletrônico durante a prova.
4. Não divulgue as questões desta prova por pelo menos 2 dias.
5. Ao entregar a prova, você atesta que não utilizou nenhum meio fraudulento para realizá-la.

As questões da prova começam na próxima página. Esta prova tem 4 questões.

Q1. (2 pontos) Seja R a região (limitada) delimitada pelos gráficos das funções $y = x + 5$ e $y = x^2 + 2x - 1$ e pelo eixo y

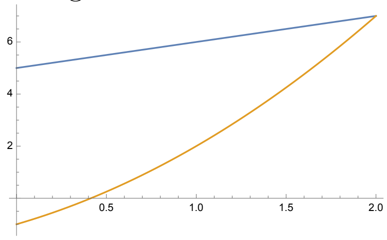
(a) Faça um esboço de R.

(b) Expresse a área de R em termos de uma integral.

(c) Calcule a área de R, ou seja, calcule a integral em (b).

Solução:

(a) A região em questão é a região abaixo do gráfico azul e acima do gráfico laranja na figura abaixo.



(b) A área da região pode ser calculada pela integral

$$A = \int_0^2 [(x+5) - (x^2 + 2x - 1)]\, dx.$$

(c) A integral de (b) pode ser calculada fazendo

$$A = \int_0^2 [(x+5) - (x^2 + 2x - 1)]\, dx = \int_0^2 (6 - x - x^2)\, dx = \frac{22}{3}.$$

Sugestão de grade de correção:

- (a) 0,5 pelo gráfico
- (b) 0,5 pela integral correta (com funções na ordem certa)
- (c) 0,5 pela integral indefinida calculada corretamente
- (c) 0,5 pelo cálculo correto
- descontar 0,2 em caso de erro de conta

Q2. (2 pontos) Verifique se a integral imprópria

$$\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt{x-3}}$$

converge ou diverge; se convergir, calcule seu valor.

Solução: A integral é imprópria pelo fato do integrando não ser limitado em $(3,4)$, já que $x=3$ é uma assíntota vertical.

Portanto,

$$\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt{x-3}} = \lim_{r\to 3^+} \int_r^4 \frac{dx}{\sqrt{x-3}} = \lim_{r\to 3^+} \left(2\sqrt{x-3}\right)\Big|_r^4 = \lim_{r\to 3^+} (2-2\sqrt{r-3}) = 2.$$

Portanto, a integral converge e vale 2.

Sugestão de grade de correção:

- 0,5 por passar para o limite
- 1,0 pela integral
- 0,5 pelo cálculo correto do limite no final
- descontar 0,2 em caso de erro de conta

Q3. (3 pontos) Calcule as integrais abaixo.

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(x-2)^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \tan^6(x)\sec^2(x)\,dx$

Solução:

(a) Esta integral pode ser resolvida usando integração por frações parciais. Note que existem A, B, C tais que

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \quad (\star).$$

Portanto,

$$\int \frac{x}{(x-1)(x-2)^2}\,dx = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}\right) dx$$

e, calculando as integrais do lado direito, temos

$$\int \frac{x}{(x-1)(x-2)^2}\,dx = A\log(x-1) + B\log(x-2) - \frac{C}{x-2} + c.$$

Podemos usar a expressão $(\star)$ para calcular agora os valores de A, B, C, resolvendo um sistema linear. Encontraremos $A = 1$, $B = -1$ e $C = 2$, portanto

$$\int \frac{x}{(x-1)(x-2)^2}\,dx = \log(1-x) - \log(2-x) - \frac{2}{x-2} + c.$$

(b) Note que $(\tan(x))' = \sec^2(x)$. Portanto, se fizermos $u = \tan(x)$, então $du = \sec^2(x)\,dx$ e daí a integral fica

$$\int \tan^6(x)\sec^2(x)\,dx = \int u^6\,du = u^7/7 + c = \tan^7(x)/7 + c.$$

Sugestão de grade de correção:

- (a) 0,5 expandir em frações parciais
- (a) 0,5 calculo correto de A, B, C
- (a) 0,5 calculo correto da integral final
- (b) 0,5 substituição correta, com cálculo de du
- (b) 0,5 resolução da integral
- (b) 0,5 resposta na variável x
- descontar 0,2 em caso de erro de conta

Q4. (3 pontos) Seja R a região entre os gráficos das funções $y = x/2$ e $y = x - x^2$, com $x \in [0, 1/2]$. Seja S o sólido obtido rotacionando R em torno do eixo x.

(a) Expresse o volume de S em termos de uma integral.

(b) Calcule o volume de S, ou seja, calcule a integral em (a).

Solução:

(a) O volume de S pode ser calculado pela integral

$$V = \int_0^{1/2} \pi[(x - x^2)^2 - (x/2)^2]\, dx.$$

(b) A integral pode ser calculada primeiro expandindo o polinômio, e depois integrando cada termo do polinômio. Note que

$$V = \int \pi[(x - x^2)^2 - (x/2)^2]\, dx = \frac{1}{4}\pi \left(\frac{4x^5}{5} - 2x^4 + x^3 \right) + c$$

Calculando em 0 e 1/2 teremos

$$V = \int_0^{1/2} \pi[(x - x^2)^2 - (x/2)^2]\, dx = \frac{\pi}{160}.$$

Sugestão de grade de correção:

- 1,0 por montar a integral correta em (a)
- 0,5 pelos cálculos para expandir o polinômio
- 1,0 pelo cálculo da integral indefinida
- 0,5 pelo valor correto da integral

FOLHA DE RASCUNHO