IMECC/Unicamp
MA111 - Cálculo I
Prova 3
29/06/2023 - 5a feira - tarde

RA: ____________ **Nome:** ____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	2	2	3	3	10
Nota:					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

1. Essa prova terá 1h40 de duração.
2. Coloque seu nome e RA em todas as páginas.
3. Não faça uso de telefone celular ou outro recurso eletrônico durante a prova.
4. Não divulgue as questões desta prova por pelo menos 2 dias.
5. Ao entregar a prova, você atesta que não utilizou nenhum meio fraudulento para realizá-la.

As questões da prova começam na próxima página. Esta prova tem 4 questões.

Q1. (2 pontos) Seja R a região entre o gráfico da função $y = \dfrac{x^2}{2+5x^3}$ e o eixo x, com $x \in [0,1]$.

(a) Expresse a área de R em termos de uma integral.

(b) Calcule a área de R, ou seja, calcule a integral em (a).

Solução:

(a) A área pode ser calculada com a integral

$$A = \int_0^1 \frac{x^2}{2+5x^3}\,dx.$$

(b) Podemos calcular a integral fazendo a mudança $u = 2+5x^3$, daí $du = 15x^2\,dx$ e com isso $du/15 = x^2\,dx$. Substituindo na integral ficamos com

$$A = \frac{1}{15}\int_2^7 \frac{du}{u}\,du = \frac{1}{15}(\ln(7) - \ln(2))$$

Sugestão de grade de correção:

- 0,5 para montar a integral em (a)
- 0,5 por fazer $u = 2+5x^3$
- 0,5 por calcular corretamente du e substituir tudo na integral
- 0,5 por finalizar a conta
- descontar 0,2 em caso de erro de conta

Q2. (2 pontos) Verifique se a integral imprópria

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\, dx$$

converge ou diverge; se convergir, calcule seu valor.

Solução: Podemos calcular essa integral imprópria usando o limite

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\, dx = \lim_{r\to\infty} \int_0^{r} x^2 e^{-x}\, dx.$$

Vamos calcular a integral indefinida e avaliar o limite. Para encontrarmos uma primitiva de x^2e^{-x}, vamos usar integração por partes duas vezes:

$$\int x^2 e^{-x}\, dx = -e^{-x}x^2 + \int 2xe^{-x}\, dx = -e^{-x}x^2 + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx\right)$$

Finalmente, obtemos

$$\int x^2 e^{-x}\, dx = -e^{-x}x^2 - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c$$

Temos

$$\int_0^{r} x^2 e^{-x}\, dx = -e^{-r}r^2 - 2re^{-r} - 2e^{-r} + 2$$

Fazendo $r \to \infty$ temos

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\, dx = \lim_{r\to\infty} \int_0^{r} x^2 e^{-x}\, dx = 2.$$

Logo, a integral converge e vale 2.

Sugestão de grade de correção:

- 0,5 por calcular a primeira vez por partes
- 0,5 por calcular a segunda vez por partes
- 0,5 por calcular a integral em $[0, r]$
- 0,5 por calcular corretamente o limite
- descontar 0,2 em caso de erro de conta

Q3. (3 pontos) Calcule as integrais abaixo.

(a) $\displaystyle\int \frac{4x+1}{x^2+4x-5}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(7x)\operatorname{sen}(x)\,dx$

Solução:

(a) Para calcular a integral, como o integrando é uma função racional, vamos usar frações parciais. Note que o denominador se fatora como $x^2+4x-5=(x-1)(x+5)$, podemos devem existir A, B tais que

$$\frac{4x+1}{x^2+4x-5}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+5}.$$

Agrupando novamente os termos, obtemos

$$\frac{4x+1}{x^2+4x-5}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+5}=\frac{A(x+5)+B(x-1)}{x^2+4x-5},$$

e daí comparando os coeficientes do polinômio no numerador, obteremos $A=5/6$ e $B=19/6$. Logo,

$$\frac{4x+1}{x^2+4x-5}=\frac{5}{6(x-1)}+\frac{19}{6(x+5)}.$$

Portanto,

$$\int \frac{4x+1}{x^2+4x-5}\,dx=\int\left(\frac{5}{6(x-1)}+\frac{19}{6(x+5)}\right)dx=\frac{5}{6}\ln(x-1)+\frac{19}{6}\ln(x+5)+c.$$

(b) Das fórmulas apresentadas, temos que

$$\operatorname{sen}(7x)\operatorname{sen}(x)=-(\cos(8x)-\cos(6x))/2.$$

Portanto,

$$\int \operatorname{sen}(7x)\operatorname{sen}(x)\,dx=-\frac{1}{2}\int(\cos(8x)-\cos(6x))\,dx=\frac{1}{12}\operatorname{sen}(6x)-\frac{1}{16}\sin(8x)+c$$

Sugestão de grade de correção:

- (a) 0,5 por decompor corretamente em frações parciais, sem calcular A e B
- (a) 0,5 por calcular corretamente A, B
- (a) 0,5 por finalizar a integral, calculando as integrais indefinidas corretamente
- (b) 0,5 por converter corretamente usando as fórmulas dadas
- (b) 0,5 por substituir na integral
- (b) 0,5 por calcular a integral
- descontar 0,2 por erro de conta ou se esquecer o $+c$ no final

Q4. (3 pontos) Seja R a região entre o gráfico de $y = \cos(x)$ e o eixo x, com $x \in [0, \pi/2]$. Seja S o sólido obtido rotacionando R em torno do eixo x.

(a) Expresse o volume de S em termos de uma integral.

(b) Calcule o volume de S, ou seja, calcule a integral em (a).

Solução:

(a) O volume de S pode ser expresso com a integral

$$V = \int_0^{\pi/2} \pi \cos^2(x)\, dx.$$

(b) Temos que

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

Portanto

$$V = \int_0^{\pi/2} \pi \cos^2(x)\, dx = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2x)}{2}\, dx = \pi\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Sugestão de grade de correção:

- (a) 1,0 por montar corretamente a integral
- (b) 1,0 por converter $\cos^2(x)$ na outra expressão
- (b) 1,0 por resolver a integral
- descontar 0,2 por erro de conta

FOLHA DE RASCUNHO