IMECC/Unicamp
MA111 - Cálculo I
Prova 3
30/06/2023 - 6a feira - manhã

RA: ____________ **Nome:** ____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	2	2	3	3	10
Nota:					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

1. Essa prova terá 1h40 de duração.
2. Coloque seu nome e RA em todas as páginas.
3. Não faça uso de telefone celular ou outro recurso eletrônico durante a prova.
4. Não divulgue as questões desta prova por pelo menos 2 dias.
5. Ao entregar a prova, você atesta que não utilizou nenhum meio fraudulento para realizá-la.

As questões da prova começam na próxima página. Esta prova tem 5 questões.

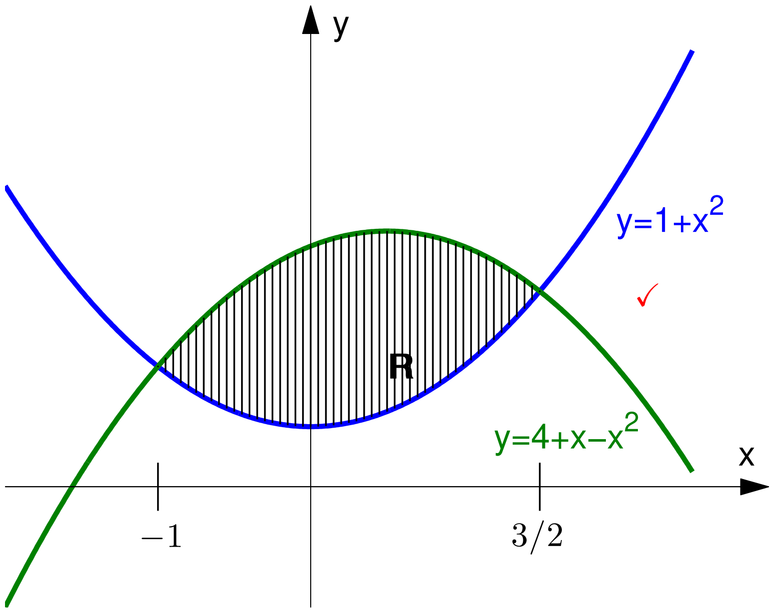
Q1. (2 pontos) Seja R a região limitada delimitada pelos gráficos de $y = 1+x^2$ e $y = 4+x-x^2$.

(a) Faça um esboço de R.

(b) Qual a área de R?

Solução:

(a) Faça um esboço de R.
Temos duas parábolas, uma aberta para cima ($y = 1 + x^2$)✓e uma aberta para baixo ($y = 4 + x - x^2$)✓, se interseccionando em $1 + x^2 = 4 + x - x^2$✓ $\Rightarrow 2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3) = 0 \Rightarrow x = -1$✓e $x = 3/2$✓, sendo que no intervalo $(-1, 3/2)$ temos $1 + x^2 < 4 + x - x^2$✓, pois em $x = 0$: $1 + 0 < 4 + 0 - 0$✓. Esboço:



(b) Qual a área de R?

$$A = \int_{-1\checkmark}^{3/2\checkmark} [(4 + x - x^2) - (1 + x^2)]\checkmark\, dx = \int_{-1}^{3/2} (3 + x - 2x^2)dx\checkmark$$
$$= \left(3x\checkmark + \frac{1}{2}x^2\checkmark - \frac{2}{3}x^3\checkmark\right)\Big|_{-1}^{3/2}\checkmark$$
$$= \left(3 \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3\right)\checkmark - \left(3 \cdot (-1) + \frac{1}{2}(-1)^2 - \frac{2}{3}(-1)^3\right)\checkmark$$
$$= \frac{9}{2} + \frac{9}{8} - \frac{9}{4} - \left(-3 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)$$
$$= \frac{36 + 9 - 18}{8} - \frac{-18 + 3 + 4}{6} = \frac{27}{8} + \frac{11}{6}\checkmark$$
$$= \frac{27 \cdot 3 + 11 \cdot 4}{24} = \frac{81 + 44}{24} = \frac{125}{24}\checkmark$$

Q2. **(2 pontos)** Calcule a integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{e^x+3}\,dx$.substituição e/ou integração por partes)

Solução:

$I = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{e^x+3}\,dx = \lim_{a\to-\infty \checkmark} \int_{a\checkmark}^{0} \frac{e^x}{e^x+3}\,dx$ (não há zero no denominador, pois $e^x > 0\checkmark$)

Na integral, usamos a substituição $u = e^x\checkmark \quad \Rightarrow \quad du = e^x dx\checkmark \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{u}du\checkmark$, $u(0) = e^0 = 1\checkmark$ e $u(a) = e^a\checkmark$. Assim,

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{a\to-\infty} \int_{e^a}^{1} \checkmark \frac{u\checkmark}{u+3\checkmark}\,\frac{1}{u}\,du\checkmark \\
&= \lim_{a\to-\infty} \int_{e^a}^{1} \frac{1}{u+3}\,du\checkmark \\
&= \lim_{a\to-\infty} \ln|u+3|\checkmark \Big|_{e^a}^{1} \checkmark \\
&= \lim_{a\to-\infty} [\ln(4)\checkmark - \ln(e^a+3)\checkmark] \\
&= \ln(4) - \lim_{a\to-\infty} \ln(\cancelto{0\checkmark}{e^a} + 3) = \ln(4) - \ln(3)\checkmark = \ln(4/3)\checkmark
\end{aligned}
$$

Q3. (3 pontos) Calcule as integrais abaixo.

(a) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-5x-6}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \cos(4x)\,\text{sen}(9x)\,dx$

Dica:

- $\text{sen}(a+b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \text{sen}(b)\cos(a)$
- $\text{sen}(a-b) = \text{sen}(a)\cos(b) - \text{sen}(b)\cos(a)$

(a) $I_a = \displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-5x-6}\,dx$

Solução:

$x^2-5x-6 = x^2-2\cdot\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}-6 \checkmark = \left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{49}{4} = \left(x-\frac{5}{2}-\frac{7}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}+\frac{7}{2}\right)\checkmark = (x-6)(x+1)\checkmark$

$\displaystyle\frac{2x+1}{x^2-5x-6} = \frac{2x+1}{(x-6)(x+1)} = \frac{A}{x-6}\checkmark + \frac{B}{x+1}\checkmark = \frac{A(x+1)+B(x-6)}{(x-6)(x+1)}\checkmark$

Em $x=6$: $2\cdot 6+1 = A(6+1)+B(6-6)\checkmark \;\Rightarrow\; A = \frac{13}{7}\checkmark$

Em $x=-1$: $2\cdot(-1)+1 = A(-1+1)+B(-1-6)\checkmark \;\Rightarrow\; B = \frac{1}{7}\checkmark$

Assim, $\displaystyle I_a = \int \frac{2x+1}{x^2-5x-6}\,dx = \frac{13}{7}\int\frac{1}{x-6}\,dx\checkmark + \frac{1}{7}\int\frac{1}{x+1}\,dx\checkmark$

$\displaystyle = \frac{13}{7}\ln|x-6|\checkmark + \frac{1}{7}\ln|x+1|\checkmark + C\checkmark$

(b) $I_b = \displaystyle\int \cos(4x)\,\text{sen}(9x)\,dx$

Usamos os teoremas de adição para escrever

$\text{sen}(9x)\cos(4x) = \frac{1}{2}\left[\text{sen}(9x+4x)+\text{sen}(9x-4x)\right]\checkmark = \frac{1}{2}\left[\text{sen}(13x)+\text{sen}(5x)\right]\checkmark.$

Assim, $\displaystyle I_b = \int \cos(4x)\,\text{sen}(9x)\,dx = \frac{1}{2}\int\left[\text{sen}(13x)+\text{sen}(5x)\right]dx\checkmark.$

Substituições: $u = 13x\checkmark$, $du = 13dx\checkmark$ e $v = 5x\checkmark$, $dv = 5dx\checkmark$:

$$I_b = \frac{1}{2}\int \text{sen}(u)\frac{1}{13}du\checkmark + \frac{1}{2}\int\text{sen}(v)\frac{1}{5}dv\checkmark = \frac{1}{26}\int\text{sen}(u)\,du + \frac{1}{10}\int\text{sen}(v)\,dv\checkmark$$

$$= -\frac{1}{26}\cos(u)\checkmark - \frac{1}{10}\cos(v)\checkmark + C\checkmark = -\frac{1}{26}\cos(13x)\checkmark - \frac{1}{10}\cos(5x)\checkmark + C$$

$$= -\frac{1}{26}\left[\cos(9x)\cos(4x)-\text{sen}(9x)\,\text{sen}(4x)\right] - \frac{1}{10}\left[\cos(9x)\cos(4x)+\text{sen}(9x)\,\text{sen}(4x)\right]+C$$

$$= \left(-\frac{1}{26}-\frac{1}{10}\right)\cos(9x)\cos(4x) + \left(\frac{1}{26}-\frac{1}{10}\right)\text{sen}(9x)\,\text{sen}(4x)+C$$

$$= -\frac{9}{65}\cos(9x)\cos(4x) - \frac{4}{65}\text{sen}(9x)\,\text{sen}(4x)+C$$

Q4. **(3 pontos)** Seja R a região no primeiro quadrante limitada pelo gráfico da função $y = x^2$ e pela reta $4x - 3y = 0$. Seja S o sólido obtido rotacionando R em torno do eixo y. Calcule o volume de S.

Solução:

Caminho 1: Cascas Cilíndricas: Isolando $y\checkmark$, temos $y = f_1(x) = x^2\checkmark$ e $y = f_2(x) = \frac{4}{3}x\checkmark$. Estas funções se interseccionam em $x^2 = \frac{4}{3}x\checkmark \Rightarrow x = 0\checkmark$ ou $x = \frac{4}{3}\checkmark$. No intervalo $(0, 4/3)$, temos $f_1 < f_2\checkmark$, pois $f_1(1) = 1 < f_2(1) = 4/3\checkmark$. Como o eixo de rotação ($y\checkmark$) é perpendicular$\checkmark$ ao eixo de integração ($x\checkmark$), usamos integração por cascas cilíndricas$\checkmark$:

$V = 2\pi\checkmark \int_{0\checkmark}^{4/3\checkmark} r(x)\checkmark[f_2(x) - f_1(x)]\checkmark\, dx$, onde o raio de rotação $r(x) = x\checkmark$.

$$\text{Assim, } V = 2\pi \int_0^{4/3} x\checkmark\left(\frac{4}{3}x - x^2\right)\checkmark dx = 2\pi \int \left(\frac{4}{3}x^2\checkmark - x^3\checkmark\right) dx = 2\pi\left(\frac{4}{9}x^3\checkmark - \frac{1}{4}x^4\checkmark\right)\Big|_0^{4/3}\checkmark$$

$$= 2\pi\left[\frac{4}{9}\left(\frac{4}{3}\right)^3\checkmark - \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^4\checkmark\right] - 0\checkmark = 2\pi\left(\frac{256}{243} - \frac{64}{81}\right)\checkmark = 2\pi\frac{256 - 3\cdot 64}{243}$$

$$= 2\pi\frac{4\cdot 64 - 3\cdot 64}{243} = 2\pi\frac{64}{243}\checkmark$$

Caminho 2: Minidiscos: Isolando $x\checkmark$, temos $x = f_1(y) = \sqrt{y}\checkmark$ (sinal positivo por estar no primeiro quadante) e $x = f_2(y) = \frac{3}{4}y\checkmark$. Estas funções se interseccionam em $\sqrt{y} = \frac{3}{4}y\checkmark \Rightarrow y = 0\checkmark$ ou $y = \frac{16}{9}\checkmark$. No intervalo $(0, 16/9)$, temos $f_1(y) > f_2(y)\checkmark$, pois $f_1(1) = 1 > f_2(1) = \frac{3}{4}\checkmark$. Como o eixo de rotação ($y\checkmark$) é paralelo$\checkmark$ ao eixo de integração ($y\checkmark$), usamos integração por minidiscos$\checkmark$:

$$V = \pi\checkmark \int_{0\checkmark}^{16/9\checkmark} f_1(y)^2\checkmark\, dy - \pi\checkmark \int_{0\checkmark}^{16/9\checkmark} f_2(y)^2\checkmark\, dy = \pi \int_0^{16/9} [(\sqrt{y})^2 - (\frac{3}{4}y)^2]\checkmark\, dy$$

$$= \pi \int_0^{16/9} [y - \frac{9}{16}y^2]\checkmark\, dy = \pi\left[\frac{1}{2}y^2\checkmark - \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{3}y^3\checkmark\right]\Big|_0^{16/9}\checkmark = \pi\left[\frac{1}{2}\left(\frac{16}{9}\right)^2\checkmark - \frac{3}{16}\left(\frac{16}{9}\right)^3\checkmark\right] - 0\checkmark$$

$$= \pi\left[\frac{128}{81} - \frac{256}{243}\right]\checkmark = \pi\left[\frac{3\cdot 128 - 2\cdot 128}{243}\right] = \pi\frac{128}{243}\checkmark$$