IMECC/Unicamp
MA111 - Cálculo I
Prova 3
30/06/2023 - 6a feira - noite

RA: ____________ **Nome:** ____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	2	2	3	3	10
Nota:					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

1. Essa prova terá 1h40 de duração.
2. Coloque seu nome e RA em todas as páginas.
3. Não faça uso de telefone celular ou outro recurso eletrônico durante a prova.
4. Não divulgue as questões desta prova por pelo menos 2 dias.
5. Ao entregar a prova, você atesta que não utilizou nenhum meio fraudulento para realizá-la.

As questões da prova começam na próxima página. Esta prova tem 4 questões.

Q1. (2 pontos) Seja R a região limitada delimitada pelos gráficos das funções $y = \operatorname{sen}(\pi x)$ e $y = x^2 - x$, com $x \in [0, 1]$.

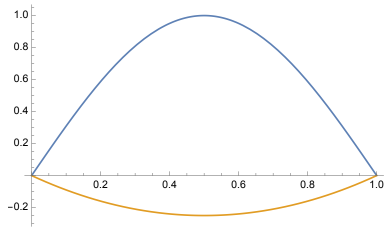
(a) Faça um esboço de R.

(b) Expresse a área de R em termos de uma integral.

(c) Calcule a área de R, ou seja, calcule a integral em (b).

Solução:

(a) Trata-se da região entre a curva azul e a curva laranja na figura a seguir:



(b) A área de R pode ser calculada com a integral

$$A = \int_0^1 (\operatorname{sen}(\pi x) - (x^2 - x))\, dx.$$

(c) Podemos calcular a área resolvendo a integral:

$$A = \int_0^1 (\operatorname{sen}(\pi x) - (x^2 - x))\, dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{\cos(\pi x)}{\pi} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{2}{\pi}.$$

Sugestão de gabarito e grade

- (a) 0,5 pelo esboço
- (b) 0,5 por montar a integral
- (c) 1,0 por resolver a integral
- descontar 0,2 por erro de conta

Q2. (2 pontos) Verifique se a integral

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\,(\ln(x))^3}$$

converge ou diverge; se convergir, calcule seu valor.

Solução: Vamos primeiro resolver a integral indefinida. Esta integral pode ser resolvida com a substituição $u = \ln(x)$. Assim, $du = du/x$ e daí

$$\int \frac{dx}{x\,(\ln(x))^3} = \int \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{2u^2} + c = -\frac{1}{2\ln^2(x)} + c$$

Agora vamos resolver a integral imprópria:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\,(\ln(x))^3} = \lim_{r\to\infty} \int_2^{r} \frac{dx}{x\,(\ln(x))^3} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log^2(2)} - \frac{1}{\log^2(r)}\right) = \frac{1}{2\log^2(2)}.$$

Logo, a integral converge.

Sugestão de gabarito e grade

- (a) 1,0 pela integral indefinida
- (b) 0,5 por trocar a integral imprópria pelo limite
- (c) 0,5 por calcular o limite corretamente
- descontar 0,2 por erro de conta

Q3. (3 pontos) Calcule as integrais abaixo.

(a) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-2x+1}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \cos^3(x)\,\mathrm{sen}^6(x)\,dx$

Solução:

(a) Esta integral é de uma função racional, portanto um bom caminho para resolvê-la é usando integração por frações parciais. Note que $x^2-2x+1=(x-1)^2$ e portanto existem A, B tais que

$$\frac{x+3}{x^2-2x+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}.$$

Daí,

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x+1}\,dx=\int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}\right)dx=A\ln(x-1)-\frac{B}{x-1}+c$$

Calculando A, B, obtemos que $A=1$ e $B=4$, portanto

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x+1}\,dx=\log(x-1)-\frac{4}{x-1}+c.$$

(b) Podemos reescrever esta integral como

$$\int \cos^3(x)\,\mathrm{sen}^6(x)\,dx=\int \cos^2(x)\,\mathrm{sen}^6(x)\cos(x)\,dx,$$

e daí usando o fato de que $\cos^2(x)=1-\mathrm{sen}^2(x)$ ficamos com

$$\int \cos^3(x)\,\mathrm{sen}^6(x)\,dx=\int (1-\mathrm{sen}^2(x))\,\mathrm{sen}^6(x)\cos(x)\,dx.$$

Fazendo $u=\mathrm{sen}(x)$, temos $du=\cos(x)\,dx$ e daí

$$\int \cos^3(x)\,\mathrm{sen}^6(x)\,dx=\int (1-\mathrm{sen}^2(x))\,\mathrm{sen}^6(x)\cos(x)\,dx=\int (1-u^2)u^6\,du.$$

Temos que

$$\int (1-u^2)u^6\,du=\frac{u^7}{7}-\frac{u^9}{9}+c,$$

daí voltando para a variável x temos finalmente que

$$\int \cos^3(x)\,\mathrm{sen}^6(x)\,dx=\frac{\sin^7(x)}{7}-\frac{\sin^9(x)}{9}+c.$$

Sugestão de grade/gabarito:

- (a) 0,5 escrever a decomposição correta em frações parciais
- (a) 0,5 calcular A, B
- (a) 0,5 calcular a integral
- (b) 0,5 fazer a mudança de variáveis correta
- (b) 0,5 calcular a integral em u
- (b) 0,5 voltar para a variável x

Q4. (3 pontos) Seja R a região entre os gráficos das funções $y = x$ e $y = x(2x - 1 - x^2)$, com $x \in [0, 1]$. Seja S o sólido obtido rotacionando R em torno do eixo y.

(a) Expresse o volume de S em termos de uma integral.

(b) Calcule o volume de S, ou seja, calcule a integral em (a).

Solução:

(a) O volume pode ser calculado com a integral

$$V = \int_0^1 2\pi x(x - (x(2x - 1 - x^2)))\, dx.$$

(b) Expandindo o integrando de (a) e calculando a integral, obtemos

$$V = \int_0^1 2\pi x(x - (x(2x - 1 - x^2)))\, dx = \frac{11\pi}{15}.$$

Sugestão de gabarito/grade

- (a) 1,0 por montar a integral
- (b) 0,5 por expandir corretamente o integrando
- (b) 1,0 por calcular a integral indefinida corretamente
- (b) 0,5 por calcular a integral definida corretamente

FOLHA DE RASCUNHO