IMECC/Unicamp
MA111 - Cálculo I
Prova 3
07 de julho - 4a feira - manhã

RA: ____________ **Nome: GABARITO**

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	3	3	2	2	10
Nota:					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

1. Essa prova terá início às 07h30 do dia 07 de julho de 2021. Você terá duas horas para resolvê-la e mais 30 minutos para preparar um arquivo com sua resolução e enviar através do "Google Sala de Aula".
2. Você deverá escrever a **resolução detalhada** das questões em folhas de papel sulfite branca. Respostas não acompanhadas de argumentos que as confirmem não serão consideradas.
3. Você deverá colocar seu nome, RA e sua assinatura em todas as folhas e numerar as páginas no formato {`página atual`}/{`total de páginas`}. Uma nova questão sempre deve ser iniciada numa página nova, isto é, nenhuma página deve ter partes de mais do que uma questão.
4. A digitalização da prova deve estar suficientemente legível e entregue preferencialmente como um único arquivo `.pdf` com nome no formato `NomeCompleto-RA.pdf`, por exemplo `JohannCarlFriedrichGauss-654321.pdf` (sem espaços e/ou acentuação).
5. Caso você tenha algum problema para submeter sua prova pelo "Google Sala de Aula", envie os arquivos escaneados por e-mail para seu professor (dentro do período de realização da prova).
6. **IMPORTANTE:** Na primeira página da sua prova deverá constar a seguinte declaração (manuscrita) e sua assinatura:

   "*Declaro que não estou recebendo ajuda de outras pessoas durante o período de realização da prova, nem faço uso de recursos não permitidos.*
   Comprometo-me a não compartilhar qualquer assunto referente a esta prova por 48h após sua realização."

As questões da prova estão na próxima página.

Q1. **(3 pontos)** Decida se cada afirmação é verdadeira ou falsa. Justifique as verdadeiras e corrija adequadamente as falsas.

(a) A integral

$$\int_0^2 (x - x^3)\, dx$$

calcula a área da região limitada pelo gráfico de $y = x - x^3$ e o eixo x, com $x \in [0, 2]$.

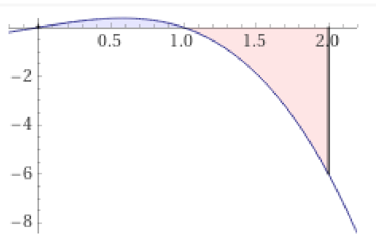
(b) Se $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(x)$, então $\int_{-2}^{4} f(x)\, dx = \int_2^4 f(x)\, dx$.

(c) Se $G(x) = \int_1^{x^4} \sec(t)\, dt$, então $G'(x) = \sec(x^4)$.

Solução:

(a) **Falso.** Note que $\int_0^2 (x - x^3)\, dx = -2$, portanto não pode significa uma área. (0,5 ponto)

O gráfico da função $k(x) = x - x^3$, bem como as áreas limitadas por ele e pelo o eixo x estão representados na figura abaixo:



Note que a função não é positiva, o que causa o problema com a afirmação. O correto seria trocar $x - x^3$ por $|x - x^3|$ no integrando:

A integral $\int_0^2 |x - x^3|\, dx$ *calcula a área da região limitada pelo gráfico de* $y = x - x^3$ *e o eixo* x*, com* $x \in [0, 2]$. (0,5 ponto)

O valor correto da área é

$$\int_0^2 |x - x^3|\, dx = \int_0^1 (x - x^3)\, dx - \int_1^2 (x - x^3)\, dx = \frac{5}{2}.$$

(b) **Verdadeiro.** A afirmação é verdadeira. Note que f é uma função contínua e ímpar, portanto a integral definida será finita. Como f é ímpar, então

$$\int_{-2}^{2} f(x) dx = 0. \text{ (0,5 ponto)}$$

Portanto,

$$\int_{-2}^{4} f(x) dx = \int_{-2}^{2} f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 f(x) dx. \text{ (0,5 ponto)}$$

(c) **Falso.** Primeiro note que não é necessário calcular a integral de $\sec(t)$ para verificar se a resposta é verdadeira ou falsa. Podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo, juntamente com a regra da cadeia. (0,5 ponto)

De fato, seja $H(t)$ uma primitiva de $\sec(t)$. Então, do TFC, temos

$$G(x) = \int_1^{x^4} \sec(t)\, dt = H(x^4) - H(1).$$

Logo, $G'(x) = H'(x^4) \cdot 4x^3$. Como $H(t)$ é primitiva de $\sec(t)$, segue que $H'(t) = \sec(t)$, portanto

$$G'(x) = 4\sec(x^4)x^3.$$ (0,5 ponto)

Q2. (a) **(1 ponto)** Escreva a decomposição em frações parciais de

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x + 2}{(x-1)^2(x^2-5x+6)(x^2+2x+7)^2}.$$

Você não precisa calcular os valores das constantes, somente exibir como será a decomposição.

(b) **(2 pontos)** A integral

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}\, dx$$

resulta numa expressão da forma

$$k \ln(x^2+2x+5) + p \arctan\left(\frac{x+r}{s}\right) + c,$$

onde c é a constante de integração. Determine os valores de k, p, r, s.

Solução:

(a) O denominador de $f(x)$ é $p(x) = (x-1)^2(x^2-5x+6)(x^2+2x+7)^2$. Note que este polinômio tem $x = 1$ como raiz dupla, e também admite $x = 2$ e $x = 3$ como raízes simples (fatore o polinômio $m(x) = x^2 - 5x + 6$). (0,5 ponto)

O polinômio irredutível $n(x) = x^2+2x+7$ aparece na decomposição de $p(x)$ elevado ao quadrado.

Portanto, a decomposição de $f(x)$ em frações parciais é da forma

$$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x-3} + \frac{Ex+F}{x^2+2x+7} + \frac{Gx+H}{(x^2+2x+7)^2}.$$ (0,5 ponto)

(b) Seja $g(x) = \dfrac{x+2}{x^2+2x+5}$. Completando quadrados no denominador e isolando a fração com numerador $x+1$, obtemos

$$g(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2+4} = \frac{x+1}{(x+1)^2+4} + \frac{1}{(x+1)^2+4}.$$ (0,5 ponto)

Portanto,

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}\, dx = \underbrace{\int \frac{x+1}{(x+1)^2+4}\, dx}_{I} + \underbrace{\int \frac{1}{(x+1)^2+4}\, dx}_{II}.$$

Vamos resolver cada uma destas integrais separadamente, e deixaremos para colocar a constante de integração somente no final do cálculo.

Para a integral I, fazemos $u = x + 1$. Assim $du = dx$ e

$$\int \frac{x+1}{(x+1)^2+4}\, dx = \int \frac{u}{u^2+4}\, dx.$$

Agora seja $w = u^2 + 4$. Assim $dw = 2u\, du$ e, portanto,

$$\int \frac{x+1}{(x+1)^2+4}\, dx = \int \frac{u}{u^2+4}\, du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{w}\, dw = \frac{1}{2}\ln|w| = \frac{1}{2}\ln|(x+1)^2+4|.$$ (1,0 ponto)

Para a integral II, também aplicamos a mudança $u = x+1$, com $du = dx$:

$$\int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx = \int \frac{1}{u^2+4}\,du = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(u/2)^2+1}\,du.$$

Agora fazemos $w = u/2$, com $dw = du/2$:

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{(u/2)^2+1}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{w^2+1}\,dw = \frac{1}{2}\arctan(w) = \frac{1}{2}\arctan\left((x+1)/2\right).$$ (0,5 ponto)

Juntando tudo, obtemos

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c,$$

onde c é a constante de integração. Assim, $k = p = 1/2$, $r = 1$ e $s = 2$.

Note que podemos trocar $\ln|x^2+2x+5|$ por $\ln(x^2+2x+5)$, pois a expressão onde o ln está sendo calculado é sempre positiva.

Obs.: Descontar (0,5 ponto) se não voltar para a variável x.

Q3. (2 pontos) Decida se a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6+9}\,dx$$

é convergente ou divergente. Caso seja convergente, calcule seu valor.

Solução: Sabemos por definição de integral imprópria que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{9+x^6}dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{9+x^6}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{9+x^6}dx \\ &= \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} \frac{x^2}{9+x^6}dx + \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t} \frac{x^2}{9+x^6}dx. \ \text{(0,5 ponto)}\end{aligned}$$

Tomando $u = x^3$ temos $du = 3x^2dx$ e então

$$\int \frac{x^2}{9+x^6}dx = \frac{1}{3}\int \frac{du}{9+u^2} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{3^2+u^2} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{u}{3}\right)+C = \frac{1}{9}\arctan\left(\frac{x^3}{3}\right)+C \ \text{(0,5 ponto)}$$

onde C é uma constante qualquer. Segue então que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{9+x^6}dx &= \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} \frac{x^2}{9+x^6}dx \\ &= \lim_{t\to-\infty}\left[\frac{1}{9}\arctan\left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_t^0 \\ &= \lim_{t\to-\infty}\left[0-\frac{1}{9}\arctan\left(\frac{t^3}{3}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{9}.\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{18}. \ \text{(0,5 ponto)}\end{aligned}$$

De maneira análoga

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{9+x^6}dx &= \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t} \frac{x^2}{9+x^6}dx \\ &= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{9}\arctan\left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^t \\ &= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{9}\arctan\left(\frac{t^3}{3}\right)-0\right] \\ &= \frac{1}{9}.\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{18}.\end{aligned}$$

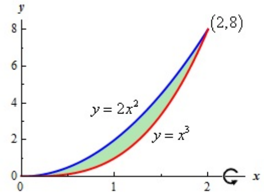
Portanto, concluímos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{9+x^6}dx = \frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{9} \ \text{(0,5 ponto)}$$

e assim a integral converge.

Q4. **(2 pontos)** Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região limitada pelas curvas $y = 2x^2$ e $y = x^3$.

Solução: Primeiramente descrevamos a região delimitada pelos gráficos das duas curvas

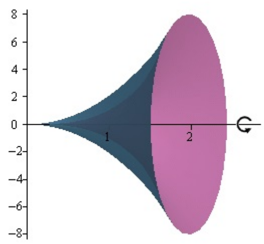


onde os pontos de intersecção são encontrados ao resolvermos a seguinte equação

$$2x^2 = x^3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(2-x) = 0 \quad \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2.$$

Logo, temos os seguintes pares ordenados: $(0,0)$ e $(2,8)$. (0,5 ponto)

O esboço do sólido de revolução será



Resumidamente, tal sólido é dado por uma "região anelar". Pelo método dos discos/anéis o volume é dado pela fórmula

$$\mathrm{V} = \int_0^2 A(x)dx,$$

onde neste caso $A(x) = \pi(\mathrm{R}_{\mathrm{Ext}}^2 - \mathrm{R}_{\mathrm{Int}}^2)$ é a área da secção transversal passando por $x \in [0,2]$. (0,5 ponto)

Assim, devemos identificar os raios interno e externo de tal região. De fato, temos que

$$\mathrm{R}_{\mathrm{Ext}} = 2x^2 \quad \text{e} \quad \mathrm{R}_{\mathrm{Int}} = x^3. \text{ (0,5 ponto)}$$

Portanto, podemos finalmente obter que

$$\mathrm{V} = \int_0^2 \pi\left[(2x)^2 - (x^3)^2\right]dx = \pi\int_0^2 \left(4x^4 - x^6\right)dx = \pi\left[\frac{4}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{256}{35}\pi \text{ (0,5 ponto)}$$