IMECC/Unicamp
MA111 - Cálculo I
Prova 3
07 de julho - 4a feira - noite

RA: ____________ **Nome: GABARITO**

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	2	3	2	3	10
Nota:					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

1. Essa prova terá início às 21h00 do dia 07 de julho de 2021. Você terá duas horas para resolvê-la e mais 30 minutos para preparar um arquivo com sua resolução e enviar através do "Google Sala de Aula".

2. Você deverá escrever a **resolução detalhada** das questões em folhas de papel sulfite branca. Respostas não acompanhadas de argumentos que as confirmem não serão consideradas.

3. Você deverá colocar seu nome, RA e sua assinatura em todas as folhas e numerar as páginas no formato {`página atual`}/{`total de páginas`}. Uma nova questão sempre deve ser iniciada numa página nova, isto é, nenhuma página deve ter partes de mais do que uma questão.

4. A digitalização da prova deve estar suficientemente legível e entregue preferencialmente como um único arquivo `.pdf` com nome no formato `NomeCompleto-RA.pdf`, por exemplo `JohannCarlFriedrichGauss-654321.pdf` (sem espaços e/ou acentuação).

5. Caso você tenha algum problema para submeter sua prova pelo "Google Sala de Aula", envie os arquivos escaneados por e-mail para seu professor (dentro do período de realização da prova).

6. **IMPORTANTE:** Na primeira página da sua prova deverá constar a seguinte declaração (manuscrita) e sua assinatura:

   "*Declaro que não estou recebendo ajuda de outras pessoas durante o período de realização da prova, nem faço uso de recursos não permitidos.*
   Comprometo-me a não compartilhar qualquer assunto referente a esta prova por 48h após sua realização."

As questões da prova estão na próxima página.

Q1. (2 pontos) Seja $h(x) = \displaystyle\int_0^{2x^3} \cos(t^2)\, dt$. Encontre $h(0)$ e $h'(x)$.

Solução: Primeiro note que

$$h(0) = \int_0^0 \cos(t^2)\, dt = 0. \text{ (0,5 ponto)}$$

Agora considere

$$k(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt$$

e seja $H(t)$ uma primitiva de $h(t) = \cos(t^2)$ e Assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo (0,5 ponto),

$$k(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt = H(x) - H(0).$$

Portanto,

$$k(2x^3) = \int_0^{2x^3} \cos(t^2)\, dt = H(2x^3) - H(0),$$

e a integral que aparece na expressão anterior é justamente $h(x)$, ou seja,

$$h(x) = H(2x^3) - H(0).$$

Derivando esta expressão obtemos

$$h'(x) = H'(2x^3)6x^2.$$

Como $H(t)$ é uma primitiva de $\cos(t^2)$, segue que $H'(t) = \cos(t^2)$. Portanto

$$h'(x) = 6x^2 \cos((2x^3)^2) = 6x^2 \cos(4x^6). \text{ (1,0 ponto)}$$

Q2. **(3 pontos)** Calcule as integrais

(a) $\displaystyle\int \frac{2}{(x+2)(x-1)^2}\,dx.$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^6(x)\cos^3(x)\,dx.$

(c) $\displaystyle\int t^{1/8}\ln(t)\,dt.$

Solução:

(a) Decompondo o integrando em frações parciais, temos que

$$\frac{2}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{L}{x+2} + \frac{M}{x-1} + \frac{N}{(x-1)^2}$$

para certos valores de L, M, N. Portanto

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{(x+2)(x-1)^2}\,dx &= \int \frac{L}{x+2}\,dx + \int \frac{M}{x-1}\,dx + \int \frac{N}{(x-1)^2}\,dx \\ &= L\ln|x+2| + M\ln|x-1| + \frac{N}{1-x} + c, \ \text{(0,5 ponto)}\end{aligned}$$

onde c é a constante de integração. Para determinar os valores de L, M, N: temos que

$$\begin{aligned}\frac{2}{(x+2)(x-1)^2} &= \frac{L}{x+2} + \frac{M}{x-1} + \frac{N}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(L+M)x^2 + (-2L+M+N)x + L - 2M + 2N}{(x-1)^2(x+2)},\end{aligned}$$

portanto temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} L + M = 0, \\ -2L + M + N = 0, \\ L - 2M + 2N = 2, \end{cases}$$

que resulta em $L = 2/9$, $M = -2/9$ e $N = 2/3$ (0,5 ponto). Portanto

$$\int \frac{2}{(x+2)(x-1)^2}\,dx = \frac{2}{9}\ln|x+2| - \frac{2}{9}\ln|x-1| + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-x} + c.$$

(b) Podemos reescrever o integrando como

$$\operatorname{sen}^6(x)\cos^3(x) = \operatorname{sen}^6(x)\cos^2(x)\cos(x) = \operatorname{sen}^6(x)(1-\operatorname{sen}^2(x))\cos(x).$$

Assim ficamos com

$$\int \operatorname{sen}^6(x)\cos^3(x)\,dx = \int \operatorname{sen}^6(x)(1-\operatorname{sen}^2(x))\cos(x)\,dx.$$

Fazendo a substituição $u = \operatorname{sen}(x)$, temos que $du = \cos(x)\,dx$ e portanto

$$\int \operatorname{sen}^6(x)\cos^3(x)\,dx = \int u^6(1-u^2)\,du = \int (u^6-u^8)\,du = \frac{u^7}{7} - \frac{u^9}{9} + c, \ \text{(0,5 ponto)}$$

onde c é a constante de integração. Voltando para a variável x, temos

$$\int \operatorname{sen}^6(x)\cos^3(x)\,dx = \frac{\operatorname{sen}^7(x)}{7} - \frac{\operatorname{sen}^9(x)}{9} + c. \ \text{(0,5 ponto)}$$

(c) Note que no integrando temos $t^{1/8}\ln(t)$. Neste produto de funções, uma delas é "simples" de derivar e a outra é "simples" de integrar. Vamos denotar $p'(t) = t^{1/8}$ e $q(t) = \ln(t)$. Temos então que resolver

$$\int p'(t)q(t)\,dt.$$

Pela regra da cadeia, segue que

$$\begin{aligned}
\int p'(t)q(t)\,dt &= p(t)q(t) - \int p(t)q'(t)\,dt \text{ (0,5 ponto)}\\
&= \frac{8t^{9/8}}{9}\ln(t) - \int \frac{8t^{9/8}}{9}\cdot\frac{1}{t}\,dt\\
&= \frac{8t^{9/8}}{9}\ln(t) - \frac{8}{9}\int t^{1/8}\,dt\\
&= \frac{8t^{9/8}}{9}\ln(t) - \frac{8}{9}\cdot\frac{8t^{9/8}}{9} + c,\\
&= \frac{8t^{9/8}}{9}\ln(t) - \frac{64t^{9/8}}{81} + c \text{ (0,5 ponto)},
\end{aligned}$$

onde c é a constante de integração.

Q3. **(2 pontos)** Avalie a convergência da integral imprópria

$$\int_4^\infty (x-1)^{-6/5}\, dx.$$

Caso seja convergente, calcule seu valor.

Solução: Por definição, temos que

$$\int_4^\infty (x-1)^{-6/5}\, dx = \lim_{r\to\infty} \int_4^r (x-1)^{-6/5}\, dx = \lim_{r\to\infty} \int_4^r \frac{1}{(x-1)^{6/5}}\, dx \quad \text{(0,5 ponto)}$$

Vamos resolver a integral e depois estudar o comportamento do limite.

$$\int_4^r \frac{1}{(x-1)^{6/5}}\, dx = -\frac{5}{(x-1)^{1/5}}\Bigg|_4^r = \frac{5}{\sqrt[5]{3}} - \frac{5}{(r-1)^{1/5}}. \quad \text{(0,5 ponto)}$$

Calculando o limite temos

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{5}{\sqrt[5]{3}} - \frac{5}{(r-1)^{1/5}}\right) = \frac{5}{\sqrt[5]{3}}. \quad \text{(0,5 ponto)}$$

Portanto, a integral é convergente e

$$\int_4^\infty (x-1)^{-6/5}\, dx = \frac{5}{\sqrt[5]{3}}. \quad \text{(0,5 ponto)}$$

Q4. (3 pontos) Seja R a região limitada por $y = x$ e por $y = x^4$, com $x \in [0, 1]$.

(a) Calcule a área de R.

(b) Seja S o sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo x. Calcule o volume de S.

(c) Seja W o sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo y. Qual o volume de W?

Solução:

(a) Note que, para $x \in [0, 1]$, temos $x \geq x^4$. (0,5 ponto) Portanto, a área de R pode ser calculada usando a integral

$$\int_0^1 (x - x^4)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{1}{3}. \text{ (0,5 ponto)}$$

(b) Podemos usar o "método das fatias" para calcular o volume do sólido: o volume será dado por

$$V_S = \int_0^1 A(x)\, dx, \text{ (0,5 ponto)}$$

onde o sólido S está localizado entre $x = 0$ e $x = 1$ e $A(x)$ é a área da seção transversal.

Note que o raio externo é dado pela revolução do gráfico da função $y = x$, enquanto o raio interno é dada pela revolução do gráfico da função $y = x^4$.

Assim, o volume de S é dado por

$$V_S = \pi \int_0^1 ((x)^2 - (x^4)^2)\, dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^8)\, dx = \frac{2\pi}{9}. \text{ (0,5 ponto)}$$

(c) Como a rotação foi feita em torno do eixo y, podemos usar cascas cilíndricas e obter que o volume é dado por

$$V_W = \int_0^1 2\pi x f(x)\, dx, \text{ (0,5 ponto)}$$

desde que a região a ser girada esteja entre o gráfico de $y = f(x)$ e o eixo x. Como estamos girando a região entre o gráfico de $y = x$ e $y = x^4$, o volume V_W será calculado com

$$V_W = \int_0^1 2\pi x(x - x^4)\, dx = \frac{\pi}{3}. \text{ (0,5 ponto)}$$