UNICAMP - IMECC
Departamento de Matemática

Prova 1 - MA-111 Cálculo I - 1s/2012

12/04/2012

Quinta Noite

Gabarito e Grade

1. **(2,0) Calcule ou argumente que os valores não existem. Em todos os casos justifique seus cálculos e respostas.**

   (a) $\lim_{x\to\infty} e^{1-x}$.

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}\, 4\mathrm{x}}{x}$.

   (c) Derivada de $f(x) = x\, ln(1+x^2)$.

   (d) Derivada de $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2+1}$ **em** $x = 0$.

   Grade: como vale 0,5pt cada item, dar nota integral ou zero, exceto no caso em que o erro foi numa conta elementar, mas o raciocínio/método estão corretos. Tirar 0,2pt nesse caso.

   Sol:

   (a) $\lim_{x\to\infty} e^{1-x} = \lim_{x\to\infty} e^1\, e^{-x} = e \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$.

   (b) Fazendo a substituição $t = 4x$, **portanto** $x \to 0$ **se e somente se** $t \to 0$, **temos**
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}\, 4\mathrm{x}}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{sen\, t}}{t/4} = 4 \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{sen\, t}}{t} = 4,$$
   usando o limite fundamental trigonométrico
   $$\lim_{\theta\to 0} \frac{\mathrm{sen}\, \theta}{\theta} = 1.$$

   (c) Usando a informação dada de que $(lnx)' = 1/x$, **a regra da cadeia e a regra de Leibniz,**
   $$f'(x) = ln(1+x^2) + x\frac{2x}{1+x^2} = ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}.$$

   (d) Usando a regra do quociente,
   $$f'(x) = \frac{(x^2+1)(-1)\mathrm{sen(x)} - \mathrm{cos(x)2x}}{(x^2+1)^2} = -\frac{(x^2+1)\mathrm{sen(x)} + 2\mathrm{x}\cos(\mathrm{x})}{(x^2+1)^2}.$$
   Logo,
   $$f'(0) = 0.$$

2. (2,0) Determine todas as assíntotas ao gráfico de $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

Grade: $0,5$pt para cada limite e equação de assíntota. Se calcular apenas um dos limites laterais no caso da assíntota vertical (suficiente para garantir sua existência), dar $0,6$pt e distribuir $0,7$pt nos dois outros subitens.

(a) **Sol: Assíntota vertical - o denominador se anula quando $x = 0$. Calculando os limites lateris neste ponto:**

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{e^x}{e^x - 1} = \text{“}\frac{1}{0^{\pm}}\text{”} = \pm\infty,$$

portanto $x = 0$ é a equação da assíntota vertical.

(b) **Sol: Assíntotas horizontais.**

i. **$x \to \infty$: Dividindo em cima e embaixo por e^x, que é sempre positivo,**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 - e^{-x}} = 1.$$

Portanto $y = 1$ é a eq. da ass. horizontal quando x tende a mais infinito.

ii. **$x \to -\infty$: Neste caso, e^x tende a zero, portanto,**

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 0.$$

Portanto $y = 0$ é a eq. da ass. horizontal quando x tende a menos infinito.

MA111 P1 Quinta Noite | Gabarito

3. (3,0) Seja $f = x^2 e^{x-1}$.

(a) Mostre que $f'(x) = (x^2 + 2x)e^{x-1}$.

(b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto em que $x = 1$.

(c) Determine os intervalos do domínio de f onde a sua derivada seja positiva, negativa ou nula.

Grade: $1,0$pt cada item, descontar $0,2$pt por erros de aritmética. No item (b), metade em cada parte, no (c), $0,25$pt para o raciocínio e $0,25$pt em cada linha de resposta.

(a) Sol: usando as Regras de Leibniz e da Cadeia, temos:

$$f'(x) = 2xe^{x-1} + x^2 e^{x-1}.1 = (x^2 + 2x)e^{x-1}.$$

(b) Sol: o ponto é $P_0 = (1, 1)$ e a inclinação é $f'(1) = 3$. Portanto, a equação da reta tangente será

$$y - 1 = 3(x - 1) \quad \text{ou seja} \quad \text{y} = 3\text{x}.$$

(c) Sol: como e^{x-1} é sempre positivo, o sinal será determinado pelo termo $x^2 + 2x = x(x+2)$. x é positivo para $x > 0$, negativo para $x < 0$, $x + 2$ é positivo para $x > -2$ e negativo para $x < -2$. Portanto,

$$f'(x) = 0 \quad \text{para} \quad \text{x} = -2 \text{ ou x} = 0,$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad \text{x} \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty) \quad \text{e}$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad \text{x} \in (-2, 0).$$

4. Resolva os itens abaixo justificando detalhadamente suas soluções.

(a) **(2,0) A função definida por** $f(x) = \dfrac{|x^2-1|}{x-1}$ **para** $x \neq 1$ **e** $f(1) = 2$ **é contínua em** $x = 1$**?**

(b) **(1,0) Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que o gráfico de**

$$f(x) = x^3 - 6\,ln(x)$$

tem um ponto horizontal no intervalo $(1,2)$ **(ponto horizontal é onde a tangente é horizontal).**

Grade: em (a), $0,5$**pt em cada limite lateral e** $1,0$**pt pela conclusão correta bem explicada. Dar** $0,5$**pt na conclusão se estiver correta mas mal explicada. Em (b),** $0,5$**pt plea derivada e** $0,5$**pt pela explicação completa.**

(a) **Sol: calculamos os limites laterais em** $x = 1$**. Para** $x > 1$**, próximo de** 1**, usamos** $|x^2-1| = x^2-1$**; se** $x < 1$**, também próximo de** 1**,** $|x^2-1| = 1-x^2$**. Portanto:**

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2,$$

onde o cancelamento é possível pois $x > 1$ **nesse cálculo de limite. Do outro lado, analogamente:**

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1+x)(1-x)}{x-1} = -\lim_{x\to 1^-}(x+1) = -2.$$

Portanto, essa função não pode ser contínua em $x = 1$**, pois o limite ali não existe. (Obs: ela é contínua *à direita* em** $x = 1$**, pois** $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 = f(1)$**.)**

(b) **Sol: precisamos mostrar que a derivada de** f **assume o valor zero no intervalo** $(1,2)$**. Derivando, obtemos:**

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{6}{x},$$

portanto, uma função contínua em seu domínio, que include o intervalo $[1,2]$**. Podemos aplicar o TVI, obtendo:** $f'(1) = 3-6 = -3$ **e** $f'(2) = 12-3 = 9$**. Portanto, como** $f'(x)$ **é contínua e troca de sinal nesse intervalo, em algum** $c \in (1,2)$ **temos** $f'(c) = 0$**.**