UNICAMP - IMECC
Departamento de Matemática

Prova 1 - MA-111 Cálculo I - 1s/2012

12/04/2012

Quinta Tarde

Gabarito e Grade

MA111 P1 Quinta Tarde | Gabarito

1. **(2,0) Calcule ou argumente que os valores não existem. Em todos os casos justifique seus cálculos e respostas.**

   (a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^3-3x^2+4}$.

   (b) $\lim_{x\to -\infty} \mathrm{sen}(\mathrm{x}^2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$.

   (c) **Derivada de** $f(x) = x^2\cos(2x-1)$.

   (d) **Derivada de** $f(x) = e^{2x} + 2x$ **em** $x = 0$.

   Soluções e grade: como vale 0,5pt cada item, dar nota integral ou zero, exceto no caso em que o erro foi numa conta elementar, mas o raciocínio/método estão corretos. Tirar 0,2pt nesse caso.

   (a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^3-3x^2+4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x^2-x-2)}$, **usando divisão de polinômios. Como** $x \neq 2$ **no cálculo do limite, o limite pode ser calculado por**

   $$\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x^2-x-2}.$$

   Mas o numerador vai para 4 **enquanto o denominador vai para** 0, **portanto o limite não existe (ou é** $\pm\infty$, **mas nesse caso cada lado dá um deles, descontar 0,2pt caso coloque apenas um dos sinais).**

   (b) **Usando que** $-1 \leq \mathrm{sen}(\mathrm{x}^2) \leq 1$, $-e^x \leq \mathrm{sen}(\mathrm{x}^2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{x}} \leq \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$, **portanto, como** $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$, **temos, pelo Teorema (Regra/Lema/Método) do Confronto,**

   $$\lim_{x\to -\infty} \mathrm{sen}(\mathrm{x}^2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{x}} = 0.$$

   (c) **Usando a Regra de Leibniz e a Regra da Cadeia,**

   $$f'(x) = 2x\cos(2x-1) + x^2(-\mathrm{sen}(2\mathrm{x}-1))2 = 2\mathrm{x}\cos(2\mathrm{x}-1) - 2\mathrm{x}^2\mathrm{sen}(2\mathrm{x}-1).$$

   (d) **Usando a Regra da Cadeia e da Soma,**

   $$f'(x) = 2e^{2x} + 2 \quad \textbf{e portanto} \quad f'(0) = 4.$$

2. (2,0) Determine todas as assíntotas ao gráfico de $f(x) = \dfrac{|x+1|}{x-1}$**.**

Solução e grade: $0,5$**pt para cada limite e equação de assíntota. Se calcular apenas um dos limites laterias no caso da assíntota vertical (suficiente para garantir sua existência), dar** $0,6$**pt e distribuir** $0,7$**pt nos dois outros subitens.**

(a) **Assíntota vertical:** $\displaystyle\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{|x+1|}{x-1} = \text{“}\frac{2}{0^{\pm}}\text{”} = \pm\infty$, **portanto** $x = 1$ **é a equação da assíntota vertical.**

(b) **Assíntotas horizontais:**

i. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{|x+1|}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1}$, **pois** $x+1$ **será positivo para valores grandes de** x**. Assim, dividindo por** x **em cima e embaixo,**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+1/x}{1-1/x} = 1.$$

Portanto, a assíntota horizontal quando $x \to \infty$ **é dada por** $y = 1$**.**

ii. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{|x+1|}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-(x+1)}{x-1}$, **pois** $x+1$ **será negativo para valores de** x **menores que** -1**, o que ocorre quando** x **tende a** $-\infty$**. Assim, dividindo por** x **em cima e embaixo,**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1-1/x}{1-1/x} = -1.$$

Portanto, a assíntota horizontal quando $x \to -\infty$ **é dada por** $y = -1$**.**

3. (3,0) Seja $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$.

(a) **Determine o domínio de** f, **mostre que** $f'(x) = \dfrac{1-3x^2}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$ **e determine o seu domínio.**

(b) **Determine a equação da reta tangente ao gráfico de** f **no ponto em que** $x = 1$.

(c) **Determine todos os valores de** x **para os quais a reta tangente é horizontal. Escreva as equações dessas retas.**

Soluções e grade: $1,0$**pt em cada item.**

(a) $0,25$**pt para cada domínio e** $0,5$**pt para a derivada.**
Sol: O dom(f) **é determinado pelo domínio de** $\sqrt{x}$, **já que o denominador nunca se anula. Portanto, dom**$(f) = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0\}$.
Pelas Regras do Quociente e do Tombo:

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)/(2\sqrt{x}) - \sqrt{x}\,2x}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1) - 4x^2}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2} = \frac{1-3x^2}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}.$$

O dom(f') **é dado pelo domínio de** $\sqrt{x}$, **eliminando-se o valor** $x = 0$, **que anula o denominador, portanto dom**$(f) = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$.

(b) $0,25$**pt para o ponto,** $0,25$**pt para a derivada e** $0,50$**pt para a equação da reta.**
Sol: O ponto em questão é $P_0 = (1, 1/2)$ **e a inclinação é dada por**

$$f'(1) = \frac{1-3}{2\sqrt{1}(1+1)^2} = -2/8 = -1/4.$$

A equação da reta tangente em P_0 **é dada por**

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) \quad \text{ou seja} \quad \text{y} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\text{x}.$$

(c) $0,5$**pt para achar o ponto eliminando o sinal negativo e** $0,5$**pt para a equação da reta.**
Sol: $f'(x) = 0$ **se e somente se** $1 - 3x^2 = 0$, **ou seja,** $x = \pm\sqrt{3}/3$. **O valor negativo não está no domínio de** f, **portanto apenas** $x = \sqrt{3}/3$ **será utilizado e, neste caso,**

$$y = f(\sqrt{3}/3) = \frac{\sqrt{\sqrt{3}/3}}{1/3+1} = \frac{\sqrt{3\sqrt{3}}/3}{4/3} = \frac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{4}$$

fornece a equação da reta tagente horizontal.

MA111 P1 Quinta Tarde	Gabarito

4. **Resolva os itens abaixo justificando detalhadamente suas soluções.**

   (a) **(2,0) Determine o valor de a para a função definida por $f(x) = a\,\mathrm{e}^{x-1}$ para $x \leq 1$ e $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ para $x > 1$ seja contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.**

   (b) **(1,0) Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a equação $x^4 - \sqrt{x} - 1 = 0$ tem solução no intervalo $(1, 2)$. Justifique sua resposta.**

   (a) $1,0$ **ponto para os limites laterais, bem explicados.** $0,5$**pt para os demais pontos e** $0,5$**pt para a conclusão bem explicada no ponto** $x = 1$.

   Sol: inicialmente, f **é contínua para todo** x **distinto de** 1**, pois as funções que a definem são contínuas em seus domínios. Para determinar** a**, calculamos os limites laterais em** $x = 1$**:**

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2,$$

   pois $x \neq 1$ **no cálculo do limite.**

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} ae^{x-1} = ae^{1-1} = a,$$

   pois a função em questão é contínua para todo x **real.**

   Portanto, para que f **seja contínua em** $x = 1$**, basta que** $a = 2$**, assim o limite existirá (os limites laterais serão iguais) e será igual a** $f(1) = 2$**.**

   (b) $0,3$**pt para a justificativa sobre a continuidade,** $0,5$**pt para o uso apropriado do TVI e** $0,2$**pt para a conclusão.**

   Sol: a função $f(x) = x^4 - \sqrt{x}-$ **é contínua em todo o seu domínio, que é** $\{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0\}$**. Portanto, podemos aplicar o TVI no intervalo** $[1, 2]$**:** $f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0$ **e** $f(2) = 16 - \sqrt{2} - 1 > 0$**, logo, pelo teorema, existe** $c \in (1, 2)$ **tal que** $f(c) = 0$**.**