UNICAMP - IMECC
Departamento de Matemática

Prova 1 - MA-111 Cálculo I - 1s/2012

13/04/2012

Sexta Manhã

Gabarito e Grade

1. **(2,0) Calcule ou argumente que os valores não existem. Em todos os casos justifique seus cálculos e respostas.**

   (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{1 - e^{2x}}$.

   (b) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

   (c) Derivada de $f(x) = e^{x\cos(x)}$.

   (d) Derivada de $f(x) = \dfrac{\text{sen(x)}}{x^2+1}$ **em** $x = 0$.

   Soluções e grade: como vale 0,5pt cada item, dar nota integral ou zero, exceto no caso em que o erro foi numa conta elementar, mas o raciocínio/método estão corretos. Tirar 0,2pt nesse caso.

   (a) Sol:
   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{1 - e^{2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{(1+e^x)(1-e^x)} = -\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+e^x} = -\frac{1}{2},$$
   onde usamos que $1 - e^x \neq 0$ **no cálculo do limite, pois** $x \neq 0$.

   (b) Sol: podemos multiplicar e dividir pela expressão $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$, **obtendo**
   $$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1-x)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} =$$
   $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0.$$

   (c) Usando a Regra de Leibniz e a Regra da Cadeia,
   $$f'(x) = e^{x\cos(x)}(\cos(x) - x\,\text{sen(x)}) = (\cos(\text{x}) - \text{x}\,\text{sen(x)})\,\text{e}^{\text{x}\cos(\text{x})}.$$

   (d) Usando a Regra do Quociente,
   $$f'(x) = \frac{(x^2+1)\cos(x) - \text{sen(x)}(2\text{x})}{(x^2+1)^2} \quad \textbf{e portanto} \quad f'(0) = \frac{1}{4}.$$

MA111 P1 Sexta Manhã	Gabarito

2. (2,0) Considere a função $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$

(a) **Determine os intervalos/pontos em que a derivada** $f'(x)$ **é positiva, nula ou negativa.**

(b) **Calcule as retas tangentes nos pontos horizontais (onde a derivada é nula).**

Grade: $1,0$**pt cada item descontar** $0,2$**pt por erro de aritmética.**

(a) **Derivando, obtemos** $f' = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x^2 - 2x - 8)$. **Portanto, as raízes da derivada são** $x = -2$ **e** $x = 4$. **Assim, a derivada é nula nesses dois valores, positiva se** $x < -2$ **ou se** $x > 4$ **e negativa em** $(-2, 4)$.

(b) **Temos** $y = f(-2) = -8 - 12 + 24 + 2 = 6$ **e** $y = f(4) = 64 - 48 - 96 + 2 = -78$ **como retas tangentes horizontais.**

3. (3,0) Seja $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$**.**

(a) Mostre que $f'(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$**.**

(b) Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de f **para** $x = 1$**.**

(c) Determine as assíntotas ao gráfico de f**.**

Grade: $1,0$ **cada item.**

(a) Sol: pelas Regras do Quociente e do Tombo:

$$f'(x) = \frac{(x+1)(2x) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}.$$

(b) $0,25$**pt para o ponto,** $0,25$**pt para a derivada e** $0,50$**pt para a equação da reta.**

Sol: O ponto em questão é $P_0 = (1, 1/2)$ **e a inclinação é dada por** $f'(1) = 3/4$**. A equação da reta tangente em** P_0 **é dada por**

$$y = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}(x-1) \quad \text{ou seja} \quad \mathrm{y} = \frac{3}{4}\mathrm{x} - \frac{1}{4}.$$

(c) Grade: $0,5$**pt para cada assíntota calculada ou explicada corretamente.**

Sol: $x = -1$ **anula o denominador mas não o numerador, portanto a função explode nesse ponto. De fato**

$$\lim_{x \to -1^{\pm}} f(x) = \pm\infty.$$

Portanto, a reta $x = -1$ **é assíntota vertical ao gráfico de** f**. Não há assíntotas horizontais, pois**

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{1 + 1/x} = \pm\infty.$$

(De fato, a reta $y = x - 1$ **é assíntota no infinito (**$\pm$**).)**

4. **Resolva os itens abaixo justificando detalhadamente suas respostas.**

   (a) **(2,0) A função definida por $f(x) = x^2 - 1$ se $x \leq 1$ e $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$ se $x > 1$ é contínua em $x = 1$?**

   (b) **(1,0) Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que os gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = e^{-x}$ se cruzam em algum ponto do intervalo $(0, 1)$. Use $e = 2,7$.**

Grade: em (a), $0,5$pt em cada limite lateral e $1,0$pt pela conclusão correta bem explicada. Dar $0,5$pt na conclusão se estiver correta mas mal explicada. Em (b), $0,3$pt pelas contas e $0,7$pt pela explicação completa.

(a) **Sol: calculamos os limites laterais em $x = 1$, usando as expressões apropriadas.**

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x+2} = \frac{2}{3}.$$

onde o cancelamento é possível pois $x > 1$ nesse cálculo de limite. Do outro lado,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2 - 1) = 0.$$

Portanto, essa função não é contínua em $x = 1$, pois o limite ali não existe, sendo os limites laterias distintos. (Mas ela é contínua à esquerda, pois $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 = f(1)$.)

(b) **Sol: basta mostrar que existe $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) - g(c) = 0$. Como as funções envolvidas são contínuas para todo número real, podemos aplicar o TVI no intervalo $[0, 1]$ para a função**

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

Temos $h(0) = 0 - 1 = -1 < 0$ e $h(1) = 1 - 1/e > 0$. Como h muda de sinal no intervalo $[0, 1]$, do TVI segue a conclusão.