UNICAMP - IMECC
Departamento de Matemática

Prova 1 - MA-111 Cálculo I - 1s/2012

13/04/2012

Sexta Noite

Gabarito e Grade

MA111 P1 Sexta Noite	Gabarito

1. **(2,0) Calcule ou argumente que os valores não existem. Em todos os casos justifique seus cálculos e respostas.**

   (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x+1}{(x-1)^2}$.

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \cos(x)\, e^{1-x}$.

   (c) Derivada de $f(x) = \cos(\mathrm{sen}^2(\mathrm{x}))$.

   (d) Derivada de $f(x) = \dfrac{e^x}{\cos(x)}$ **em** $x = 0$.

   Grade: como vale 0,5pt cada item, dar nota integral ou zero, exceto no caso em que o erro foi numa conta elementar, mas o raciocínio/método estão corretos. Tirar 0,2pt nesse caso.

   Sol:

   (a) Temos

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x+1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+x-1)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-1}{(x-1)},$$

   pois $x \neq 1$ **no cálculo do limite. No entanto, nessa expressão o numerador tende** 1**, enquanto o denominador tende a** 0**. Portanto o limite não existe.**

   (b) Usando que $-1 \leq \cos(x) \leq 1$**, obtemos** $-e^{1-x} \leq \cos(x)\, e^{1-x} \leq e^{1-x}$**. Portanto, como** $\lim\limits_{x\to\infty} e^{1-x} = e \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$**, temos, pelo Teorema (Regra/Lema/Método) do Confronto,**

$$\lim_{x\to\infty} \cos(x)\, e^{1-x} = 0.$$

   (c) Usando a Regra da Cadeia duas vezes e as derivadas trigonométricas,

$$f'(x) = -\mathrm{sen}(\mathrm{sen}^2(\mathrm{x})\,(\mathrm{sen}^2(\mathrm{x}))' = -\mathrm{sen}(\mathrm{sen}^2(\mathrm{x}))\,2\,\mathrm{sen}(\mathrm{x})\cos(\mathrm{x}) =$$

$$-2\,\mathrm{sen}(\mathrm{x})\cos(\mathrm{x})\mathrm{sen}(\mathrm{sen}^2(\mathrm{x})).$$

   (d) Usando a regra do quociente,

$$f'(x) = \frac{\cos(x)e^x - e^x(-\mathrm{sen}(\mathrm{x}))}{\cos^2(x)} = \frac{e^x(\cos(x) + \mathrm{sen}(\mathrm{x}))}{\cos^2(x)}.$$

   Logo,

$$f'(0) = 1.$$

2. (2,0) Seja $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$. Determine todas as assíntotas ao gráfico de f, escrevendo suas equações e justificando as respostas.

Solução e grade: $0,5$pt para cada limite e equação de assíntota. Se calcular apenas um dos limites laterias no caso da assíntota vertical (suficiente para garantir sua existência), dar $0,6$pt e distribuir $0,7$pt nos dois outros subitens.

(a) **Assíntota vertical: $x = 0$ anula o denominador e $\lim\limits_{x\to 0^\pm} \dfrac{\cos(x)}{x} = \text{“}\dfrac{1}{0^\pm}\text{”} = \pm\infty$, portanto $x = 0$ é a equação da assíntota vertical.**

(b) **Assíntotas horizontais: como $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ e $\lim\limits_{\to\pm\infty} \dfrac{\pm 1}{x} = 0$, o Teorema do Confronto implica que**

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0.$$

Portanto, $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico quando x tende a $\pm\infty$.

3. (3,0) Seja $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$**.**

(a) Mostre que $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$**.**

(b) Determine os pontos em que a reta tangente ao gráfico de f **é paralela à reta** $y = 2x$**.**

(c) Calcule as equações das retas tangentes determinadas em (b).

Grade: $1,0$**pt em cada item.**

(a) Sol: pela Regra do Quociente:

$$f'(x) = \frac{(x+1).1-(x-1).1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

(b) Sol: Devemos determinar os pontos onde $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2} = 2$**. Isso ocorre se e somente se** $(x+1)^2 = 1$**, portanto, quando** $x = 0$ **ou** $x = -2$**.**

(c) $0,1+0,1$**pt pelos pontos,** $0,1+0,1$**pt pelas inclinações,** $0,3+0,3$**pt pelas equações.**

Sol: os pontos e inclinações são dados por: $P_1 = (0,-1)$ **e** $m_1 = f'(0) = 2$**,** $P_2 = (-2,3)$ **e** $m_2 = f'(-2) = 2$ **(as derivadas, já sabíamos que seriam iguais a** 2**, apenas nos certificamos de que isso de fato ocorre). Portanto, as equações das retas tangentes são, respectivamente:**

$$y = -1+2x = 2x-1 \quad \text{e}$$

$$y = 3+2(x+2) = 2x+7.$$

4. Resolva os itens abaixo justificando detalhadamente suas respostas.

(a) (2,0) Determine a para que a função definida por $f(x) = x^2 + a$ se $x \leq 0$ e $f(x) = e^x$ se $x > 0$ seja contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) (1,0) Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que o gráfico de

$$f(x) = e^x + x^2$$

fica horizontal em algum ponto do intervalo $(-1, 0)$. (Use $e = 2,7$.) Ponto horizontal do gráfico significa que a reta tangente é horizontal naquele ponto.

Grade: em (a), $0,5$pt em cada limite lateral e $1,0$pt pela conclusão correta bem explicada. Dar $0,5$pt na conclusão se estiver correta mas mal explicada. Em (b), $0,5$pt pela derivada e $0,5$pt pela explicação completa.

(a) Sol: inicialmente, f é contínua para todo $x \neq 0$, pois as funções que a definem são contínuas. Para determinar a, calculamos os limites laterais em $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x = 1.$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 + a) = a.$$

Portanto, para que f seja contínua em $x = 0$, basta que $a = 1$, assim o limite existirá (os limites laterais serão iguais) e será igual a $f(0) = 0^2 + 1 = 1$.

(b) Sol: temos que mostrar que a derivada de $f(x) = e^x + x^2$, que é dada por $f'(x) = e^x + 2x$, assume o valor zero em algum ponto do intervalo $(-1, 0)$. Como f é contínua para todos os números reais, podemos aplicar o TVI no intervalo $[-1, 0]$. Para isso, calculamos: $f'(-1) = 1/e - 2 < 0$ e $f'(0) = 1 > 0$. Portanto, pelo TVI, como f' muda de sinal no intervalo $[-1, 0]$, deve existir $c \in (-1, 0)$ tal que $f'(c) = 0$.