IMECC/UNICAMP
MA211 - Cálculo II
Coordenador: João Vitor da Silva
Prova P1 - Manhã
05 de Setembro de 2025 - 6ª-feira - 08:00hs às 10:00hs

RA: ____________ **Nome:** ____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	3	2	2,5	2,5	10
Nota:					

Instruções para a realização de sua prova:

1. Usar (somente) caneta **Azul/Preta**, ou lapisera de cor escura - Não desgrampear a prova!
2. **Desliguem/Guardem** os **celulares e relógios** (Smart Watch);
3. Não é permitido sair da sala de aula durante a realização da prova;
4. Não é permitida a utilização de folhas (A4, caderno e etc) extras.
5. É vedada a utilização de qualquer material/dispositivo de apoio extra.
6. Esta prova terá início às 08:00hs e término às 10:00hs do dia 05 de setembro de 2025.
7. Você deverá escrever a resolução das questões de maneira clara e objetiva. Respostas não acompanhadas de argumentos que as confirmem não serão consideradas.

As questões da prova estão na próxima folha.

Se necessário, utilize o verso desta página como rascunho.

Q1. Resolva os seguintes itens justificando suas respostas:

(a) **(1 ponto)** Determine se o limite existe ou não. Caso exista, calcule-o

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3+y^9}$$

(b) **(1 ponto)** Calcule o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^4}.$$

(c) **(1 ponto)** Calcule, se existir,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}.$$

Solução:

(a) Observe que é suficiente considerarmos a trajectoria $x = y^3$ que passa por $(0,0)$ (0,3 Pontos). Assim, tem-se

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^3}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^3}} \frac{xy}{x^3+y^9} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^9+y^9} = \lim_{y\to 0^\pm} \frac{1}{2y^5} = \pm\infty \quad (0,4 \text{ Pontos})..$$

Logo, concluímos que **o limite não existe** (0,3 Pontos).

(b) Dado que $0 \le y^4$, isto implica que $x^2 \le x^2+y^4$, para qualquer ponto $(x,y) \neq (0,0)$. Assim, tem-se que

$$0 \le \left|\frac{x^2y}{x^2+y^4}\right| = \frac{x^2|y|}{x^2+y^4} \le \frac{(x^2+y^4)|y|}{x^2+y^4} = |y| \quad (0,4 \text{ Pontos})..$$

Além disso, tem-se que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0 \quad (0,2 \text{ Pontos}).$$

Portanto, pelo **Teorema do Confronto** segue que

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^2y}{x^2+y^4}\right| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^4} = 0 \quad (0,4 \text{ Pontos}).}.$$

(c) Tomemos coordenadas polares $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ com $r \ge 0$. Então $x^2+y^2 = r^2$ e

$$\frac{1-\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2} = \frac{1-\cos r}{r^2}, \qquad r > 0 \quad (0,3 \text{ Pontos})..$$

Como a expressão do quociente depende apenas de r (isto é, é independente de θ), o limite bidimensional existe se, e somente se, existir o limite unidimensional

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1-\cos r}{r^2}.$$

Verificamos que, quando $r \to 0^+$, tanto o numerador como o denominador tendem a 0, de modo que podemos aplicar a Regra de L'Hôpital (as funções são diferenciáveis para $r \neq 0$ e $(r^2)' = 2r \neq 0$ para $r \neq 0$) (0,2 Pontos).. Assim, diferenciando numerador e denominador obtemos

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1-\cos r}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{(\,1-\cos r\,)'}{(r^2)'} = \lim_{r\to 0^+} \frac{\sin r}{2r} = \frac{1}{2}\lim_{r\to 0^+} \frac{\sin r}{r} = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2} \quad (0,4 \text{ Pontos}).,$$

onde acima usamos o Limite Trigonométrico Fundamental

$$\boxed{\lim_{r\to 0^+} \frac{\sin r}{r} = 1 \;\; (0,1 \text{ Ponto}).}$$

Portante,

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\,\right)}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}.}$$

Q2. (**2 pontos**) Considere a curva dada por

$$x^2 + y^3 z - \frac{xz}{y} = 0.$$

onde z está definida **implicitamente** em função de (x, y), i.e., $z = f(x, y)$. Determinar o plano tangente no ponto $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 4)$.

Solução:

Ao denotarmos

$$F(x, y, z) = x^2 + y^3 z - \frac{xz}{y} \quad (0,2 \text{ Pontos}).$$

observamos que

$$F_x(x, y, z) = 2x - \frac{z}{y}, \qquad F_y(x, y, z) = 3y^2 z + \frac{xz}{y^2} \qquad \text{e} \qquad F_z(x, y, z) = y^3 - \frac{x}{y} \quad (0,6 \text{ Pontos})..$$

Dado que temos

$$F_z(2, 1, 4) = -1 \neq 0 \quad (0,2 \text{ Pontos}).,$$

então podemos aplicar o **Teorema da Função Implícita** na vizinhança de (x_0, y_0, z_0), dado que $F(x, y, z) = 0$ se possa escrever como $z = f(x, y)$. Além disso,

$$f_x(2, 1) = -\frac{F_x(2, 1, 4)}{F_z(2, 1, 4)} = 0, \qquad \text{e} \qquad f_y(2, 1) = -\frac{F_y(2, 1, 4)}{F_z(2, 1, 4)} = 20 \quad (0,4 \text{ Pontos})..$$

Finalmente, a equação do plano a f no ponto $(2, 1, 4)$ é dada por

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{z - 4 = 20(y - 1)} \quad (0,6 \text{ Pontos})..$$

Q3. **(2 ,5 pontos)** Determine o volume máximo da maior caixa retangular no primeiro octante com três faces nos planos coordenados e com um vértice no plano $x + 2y + 3z = 6$.

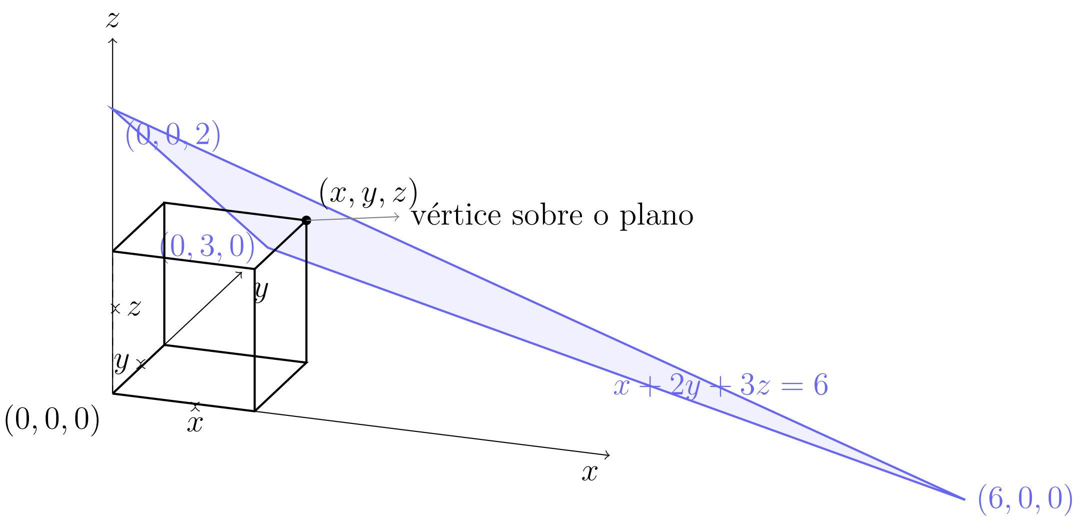


Figura: Caixa retangular no 1º octante com vértice (x, y, z) satisfazendo $x + 2y + 3z = 6$.

Solução:

Vamos maximizar a função $\mathrm{V} : [0, 6] \times [0, 3] \times [0, 2] \to [0, \infty)$ dada por $\mathrm{V}(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$ em que $x, y, z > 0$ sob a condição $z = \frac{6-x-2y}{3}$ (0,2 Pontos).

Assim, pelo **Teorema de Weierstrass** ou **Teorema dos valores extremos**, a função V atinge seus valores máximos e mínimos em seu domínio de definição, pois V é contínua e seu domínio é compacto. Além disso, o valor mínimo de V é zero, se qualquer uma das variáveis assumir valor zero. Por tal razaõ, trabalharemos com $x, y, z > 0$. (0,2 Pontos)

Logo, para $(x, y) \in [0, 6] \times [0, 3]$ devemos maximizar

$$f(x, y) = x \cdot y \cdot \left(\frac{6 - x - 2y}{3}\right) = \frac{6xy - x^2y - 2xy^2}{3} \quad (0,2 \text{ Pontos}).$$

Para encontrar os pontos críticos, devemos encontrar as derivadas parciais f_x e f_y. Assim,

$$f_x(x, y) = 6y - 2xy - \frac{2y^2}{3}, \quad f_y(x, y) = 6x - x^2 - \frac{4xy}{3} \quad (0,2 \text{ Pontos}).$$

Fazendo $f_x = 0$ e $f_y = 0$, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 6y - 2xy - \frac{2y^2}{3} = 0 \\ 6x - x^2 - \frac{4xy}{3} = 0 \end{cases} \quad (0,2 \text{ Pontos}).$$

Da primeira equação obtemos

$$y = 0 \quad \text{ou} \quad y = 3 - x \quad (0,2 \text{ Pontos}).$$

Como $y = 0$ não nos convém, vamos analisar o caso onde $y = 3 - x$. Substituindo esse valor na segunda equação obtemos

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 3x^2 - 6x = 0 \quad (0,2 \text{ Pontos}).$$

Novamente, como $x = 0$ não satisfaz as condições, vamos analisar o caso

$$3x^2 - 6x = 0 \implies x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2 \ \ (0,2 \text{ Pontos}).$$

Novamente, $x = 0$ não nos interessa. Assim, sendo $\boxed{x = 2}$, obtemos

$$\boxed{y = 1 \quad \text{e} \quad z = \frac{2}{3} \ \ (0,2 \text{ Pontos}).}$$

Teste das segundas derivadas (Critério de Sylvestre)

As segundas derivadas são

$$f_{xx}(x,y) = -2y, \qquad f_{yy}(x,y) = -\frac{4}{3}x, \qquad f_{xy}(x,y) = 6 - 2x - \frac{4}{3}y.$$

A matriz Hessiana é diagonal:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & 6 - 2x - \frac{4}{3}y \\ 6 - 2x - \frac{4}{3}y & -\frac{4}{3}x \end{pmatrix} \ \ (0,2 \text{ Pontos})$$

O discriminante do teste (determinante da Hessiana) é

$$D(x,y) = \det H_f(x,y) = \frac{8}{3}xy - \left(6 - 2x - \frac{4}{3}y\right)^2 \ \ (0,1 \text{ Ponto})$$

Classificamos o ponto crítico:

- Em $(2,1)$: $f_{xx} = -2(1) = -2 < 0$, $D(2,1) = \frac{44}{9} > 0 \Rightarrow$ **máximo local** (0,2 Pontos).

Portanto, o volume máximo da maior caixa, nas condições do exercício, será

$$\boxed{\mathrm{V}_{\text{Máx}} = \mathrm{V}\left(2, 1, \frac{2}{3}\right) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \quad \text{Unidades de volume} \ \ (0,2 \text{ Pontos}).}$$

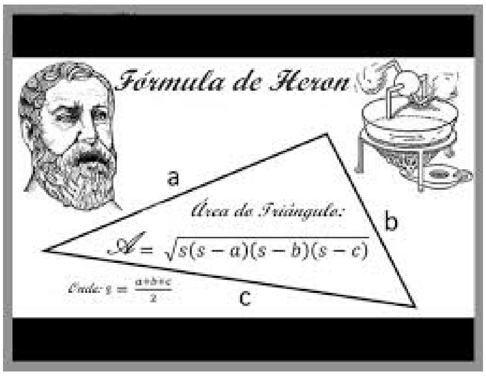
Q4. **(2,5 pontos)** Utilizando a *Fórmula de Heron* para área de um triângulo

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}(x, y, z) = \sqrt{(1-x)(1-y)(1-z)},$$

em que x, y e z são os comprimentos dos lados do triângulo, e, o **Método dos Multiplicadores de Lagrange**, mostre que o triângulo com área máxima, e que tem perímetro constante

$$2 = x + y + z = \text{perímetro},$$

é equilátero.



Solução:

Utilizando a fórmula de Heron, a área de um triângulo é

$$\mathrm{A} = \sqrt{(1-x)(1-y)(1-z)},$$

em que $0 \leq x, y, z \leq 1$ são os comprimentos dos lados do triângulo.

Para simplificar a álgebra/cálculos, é conveniente maximizar o quadrado da área (0,2 Pontos), ou seja,

$$\mathrm{A}^2 = f(x, y, z) = (1-x)(1-y)(1-z) \quad \text{com} \quad \mathrm{A}^2 : [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \to [0, \infty).$$

De fato, dado que A é não-negativa tem-se que

$$\mathrm{A}_{\text{Máx}} = \mathrm{A}(x_{\text{Máx}}, y_{\text{Máx}}, z_{\text{Máx}}) \geq \mathrm{A}(x, y, z) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{A}^2_{\text{Máx}} = \mathrm{A}^2(x_{\text{Máx}}, y_{\text{Máx}}, z_{\text{Máx}}) \geq \mathrm{A}^2(x, y, z)$$

Assim, pelo **Teorema de Weierstrass** ou **Teorema dos valores extremos**, a função A^2 atinge seus valores máximos e mínimos em seu domínio de definição, pois A^2 é contínua e seu domínio é compacto. Além disso, se qualquer uma das variáves for igual a zero ou igual a um, então $\mathrm{A}^2 \equiv 0$ será o valor mínimo (0,2 Pontos).

A restrição é que o triângulo tem perímetro constante $p = 2$, ou seja,

$$g(x, y, z) = x + y + z = 2 \;\; (0,2 \text{ Pontos}).$$

De acordo com o **Método dos Multiplicadores de Lagrange**, resolvemos

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{e} \quad g(x, y, z) = 2 \;\; (0,4 \text{ Pontos}).$$

Calculando o gradiente de f, obtemos

$$\nabla f(x, y, z) = \Big(-(1-y)(1-z),\; -(1-x)(1-z),\; -(1-x)(1-y)\Big) \;\; (0,2 \text{ Pontos}),$$

e o gradiente de g é

$$\nabla g(x, y, z) = (1, 1, 1) \implies \lambda \nabla g = (\lambda, \lambda, \lambda) \ \ (0,2 \text{ Pontos}).$$

Portanto, as equações do método de Lagrange são

$$-(1-y)(1-z) = -(1-x)(1-z) = -(1-x)(1-y), \quad \text{e} \quad x + y + z = 2 \ \ (0,5 \text{ Pontos}).$$

Das igualdades entre as derivadas, temos

$$-(1-y)(1-z) = -(1-x)(1-z) \implies 1-y = 1-x \implies y = x \ \ (0,2 \text{ Pontos}),$$
$$-(1-x)(1-z) = -(1-x)(1-y) \implies 1-z = 1-y \implies z = y \ \ (0,2 \text{ Pontos}),$$

onde usamos que $1-z \neq 0 \neq 1-x$, caso contrário o triângulo teria um dos lados colapsados. Assim, concluímos que

$$g(x, y, z) = x + y + z = 2 \quad \implies \quad \boxed{x = y = z = \frac{2}{3}}.$$

Portanto, o triângulo com área máxima (máxima, pois já sabemos que a mesma é atingida e a área mínima é zero) e perímetro constante $p = 2$ é um triângulo equilátero (0,2 Pontos).

Além disso, para título de informação tal área será:

$$\mathrm{A}_{\text{Máx}} = \mathrm{A}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \sqrt{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^3} = \frac{\sqrt{3}}{9} \quad \text{Unidades de área.}$$

Para explicações sobre a solução do exercício, acessem por favor o seguinte link:

`https://www.youtube.com/watch?v=bTXTpgTOIPc`

Para uma prova alternativa usando desigualdades entre as médias (média aritmética e média geométrica), veja por favor:

`https://www.youtube.com/watch?v=PVLx0wDJQfM`

BOA SORTE E SUCESSO A TODA(O)S!