IMECC/UNICAMP
MA211 - Cálculo II
Coordenador: João Vitor da Silva
Prova P1 - Noite
05 de Setembro de 2025 - 6ª-feira - 19:00hs às 21:00hs

RA: ______________ **Nome:** ____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	2,5	2,5	3	2	10
Nota:					

Instruções para a realização de sua prova:

1. Usar (somente) caneta **Azul/Preta**, ou lapisera de cor escura - Não desgrampear a prova!
2. **Desliguem/Guardem** os **celulares e relógios** (Smart Watch);
3. Não é permitido sair da sala de aula durante a realização da prova;
4. Não é permitida a utilização de folhas (A4, caderno e etc) extras.
5. É vedada a utilização de qualquer material/dispositivo de apoio extra.
6. Esta prova terá início às 19:00hs e término às 21:00hs do dia 05 de setembro de 2025.
7. Você deverá escrever a resolução das questões de maneira clara e objetiva. Respostas não acompanhadas de argumentos que as confirmem não serão consideradas.

As questões da prova estão na próxima página.

Se necessário, utilize o verso desta página como rascunho.

Q1. **(2,5 pontos)** Em cada item, **justifique** claramente o método utilizado e a conclusão obtida (se este for o caso de existência ou não do limite).

(a) (**0,5 Ponto**) Calcule o seguinte limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$.

(b) (**1 Ponto**) Determine o valor de $\kappa \in \mathbb{R}$ para que a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(y)y^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \kappa+1 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

seja contínua na origem.

(c) (**1 Ponto**) Averigue se o limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$ existe.

Solução:

(a) Dado que $|\sin(\cdot)| \leq 1$, logo

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \quad (0,1 \text{ Pontos}).$$

Recorde que pela MA-MG, tem-se $x^2y^2 \leq \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2$, de modo que

$$0 \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)^2/4}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2}{4} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \quad (0,1 \text{ Pontos}).$$

Alternativamente, sabemos que para $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1 \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

Em qualquer dos casos, tem-se

$$0 \leq \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{4} \quad \text{ou} \quad 0 \leq \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq x^2 \quad (0,1 \text{ Pontos}).$$

Como $\frac{x^2+y^2}{4}, x^2 \to 0$ quando $(x,y) \to (0,0)$, segue pelo **Teorema do Confronto** que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0 \quad (0,2 \text{ Pontos}).$$

(b) Queremos encontrar $\kappa \in \mathbb{R}$ tal que f seja contínua em $(0,0)$. Basta calcular

$$\ell := \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(y)\,y^3}{x^2+y^2}$$

e exigir que $f(0,0) = \kappa+1 = \ell$ (0,2 Pontos).

Cálculo do limite. Para todo $(x,y) \neq (0,0)$ temos as estimativas elementares $|\sin y| \leq 1$ e $\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$. Assim,

$$0 \leq \left|\frac{\sin(y)\,y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|y|^3}{x^2+y^2} = \frac{|y|y^2}{x^2+y^2} \leq |y| \quad (0,2 \text{ Pontos}).$$

Como $|y| \to 0$ quando $(x,y) \to (0,0)$, segue pelo **Teorema do Confronto** que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{\sin(y)\, y^3}{x^2+y^2} \right| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(y)\, y^3}{x^2+y^2} = 0 \ (0,2 \text{ Pontos}).$$

Conclusão sobre κ. Para que f seja contínua em $(0,0)$ precisamos de

$$\kappa + 1 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(y)\, y^3}{x^2+y^2} = 0 \ (0,2 \text{ Pontos}),$$

logo

$$\boxed{\kappa = -1 \ (0,2 \text{ Pontos}).}$$

(c) Queremos averiguar se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$$

existe. Observe primeiro que a expressão está bem definida para todo $(x,y) \neq (0,0)$, pois $x^2+y^6 = 0$ só em $(0,0)$.

Uma forma direta e elementar de provar que um limite em $\mathbb{R}^2$ *não* existe é mostrar duas (ou mais) trajetórias diferentes que tendem à origem e para as quais a função tende a valores distintos. Vamos construir duas sequências/trajectórias simples.

Trajetória 1: Sobre o eixo $x = 0$ temos, para $y \neq 0$,

$$f(0,y) = \frac{0 \cdot y^3}{0+y^6} = 0.$$

Logo, ao aproximar a origem por pontos $(0,y)$ com $y \to 0$,

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0.$$

Em particular, tomando a sequência $(x_n, y_n) = (0, 1/n) \to (0,0)$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = 0 \ (0,4 \text{ Pontos})..$$

Trajetória 2: Considere a curva $x = y^3$. Para $y \neq 0$,

$$f(y^3,y) = \frac{(y^3)\,y^3}{(y^3)^2+y^6} = \frac{y^6}{y^6+y^6} = \frac{y^6}{2y^6} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, aproximando a origem por pontos $(x,y) = (y^3,y)$ com $y \to 0$,

$$\lim_{y\to 0} f(y^3,y) = \frac{1}{2}.$$

Por exemplo, para a sequência $(x_n,y_n) = (1/n^3, 1/n) \to (0,0)$ obtemos

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \frac{1}{2}. \ (0,4 \text{ Pontos}).$$

Como os dois limites ao longo de trajetórias diferentes são distintos (0 e $1/2$), concluímos que o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$$

não existe (0,2 Pontos).

Observação adicional (solução alternativa). Mais geralmente, ao tomar a família de curvas $x = c\,y^3$ com $c \in \mathbb{R}$ (0,3 Pontos)., tem-se para $y \neq 0$

$$f(cy^3, y) = \frac{c\,y^6}{c^2y^6 + y^6} = \frac{c}{c^2+1},$$

logo o limite ao longo da curva $x = cy^3$ é $\dfrac{c}{c^2+1}$ (0,2 Pontos). Variando c obtém-se, assim, diferentes valores-limite (por exemplo 0 para $c = 0$, $1/2$ para $c = 1$, $-1/2$ para $c = -1$) (0,3 Pontos), o que reforça a conclusão de que o limite na origem não existe.

$\boxed{\text{Conclusão: O limite não existe (0,2 Pontos).}}$

Q2. Em um circuito elétrico, a corrente elétrica $\Im$ é dada por

$$\Im(R,L) = \begin{cases} \frac{V_0}{\sqrt{R^2+w^2L^2}} & \text{se} \quad (R,L) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (R,L) = (0,0) \end{cases}$$

em que V_0 é a voltagem, R é a resistência, L e a indutância e w uma constante positiva. Determine:

(a) **(1 ponto)** $\frac{\partial \Im}{\partial R}(R,L)$ e $\frac{\partial \Im}{\partial L}(R,L)$ para $(R,L) \neq (0,0)$.

(b) **(1 ponto)** $\frac{\partial \Im}{\partial R}(0,0)$ e $\frac{\partial \Im}{\partial L}(0,0)$ (utilize a definição);

(c) **(,5 ponto)** A função $\Im$ admite plano tangente em $(0,0)$? Justifique!

Solução:

Seja

$$\Im(R,L) = \begin{cases} \dfrac{V_0}{\sqrt{R^2+w^2L^2}}, & (R,L) \neq (0,0), \\ 0, & (R,L) = (0,0), \end{cases}$$

onde V_0 e $w > 0$ são constantes.

(a) *Cálculo de* $\dfrac{\partial \Im}{\partial R}(R,L)$ *e* $\dfrac{\partial \Im}{\partial L}(R,L)$ *para* $(R,L) \neq (0,0)$.

Para $(R,L) \neq (0,0)$ podemos escrever

$$\Im(R,L) = V_0 \big(R^2 + w^2L^2\big)^{-1/2}.$$

Usando a **Regra da Cadeia**, obtemos

$$\frac{\partial \Im}{\partial R}(R,L) = V_0 \cdot \Big(-\tfrac{1}{2}\Big)\big(R^2+w^2L^2\big)^{-3/2} \cdot 2R = -\frac{V_0 R}{\big(R^2+w^2L^2\big)^{3/2}} \quad (0,5 \text{ Pontos}),$$

e

$$\frac{\partial \Im}{\partial L}(R,L) = V_0 \cdot \Big(-\tfrac{1}{2}\Big)\big(R^2+w^2L^2\big)^{-3/2} \cdot 2w^2L = -\frac{V_0 w^2 L}{\big(R^2+w^2L^2\big)^{3/2}} \quad (0,5 \text{ Pontos}).$$

Em forma vetorial,

$$\nabla \Im(R,L) = -\frac{V_0}{\big(R^2+w^2L^2\big)^{3/2}}(R,\ w^2L).$$

(b) *Cálculo de* $\dfrac{\partial \Im}{\partial R}(0,0)$ *e* $\dfrac{\partial \Im}{\partial L}(0,0)$ *pela definição.*

Pela definição de derivada parcial em $(0,0)$ temos, se o limite existir,

$$\frac{\partial \Im}{\partial R}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\Im(h,0)-\Im(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{V_0}{\sqrt{h^2+0}} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{V_0}{|h|\,h} \quad (0,2 \text{ Pontos}).$$

Para $h > 0$ obtemos $\dfrac{V_0}{|h|h} = \dfrac{V_0}{h^2} \to +\infty$ quando $h \to 0^+$. Para $h < 0$ obtemos $\dfrac{V_0}{|h|h} = \dfrac{V_0}{(-h)h} = -\dfrac{V_0}{h^2} \to -\infty$ quando $h \to 0^-$. Logo o limite não existe (diverge com sinais opostos), portanto

$$\boxed{\text{não existe } \frac{\partial \Im}{\partial R}(0,0) \ (0,3 \text{ Pontos}).}$$

Analogamente, para a derivada parcial em L:

$$\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial L}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathfrak{I}(0,h)-\mathfrak{I}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{V_0}{\sqrt{0+w^2h^2}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{V_0}{w|h|\,h} \quad (0,2 \text{ Pontos}).$$

Para $h > 0$ a quociente é $V_0/(wh^2) \to +\infty$, e para $h < 0$ tende a $-\infty$. Portanto também

$$\boxed{\text{não existe } \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial L}(0,0) \ \ (0,3 \text{ Pontos}).}$$

(c) *A função $\mathfrak{I}$ admite plano tangente em $(0,0)$?*

Não. Há duas razões simples e complementares:

- Uma condição necessária para existência do plano tangente (ou seja, diferenciabilidade) em $(0,0)$ é que as derivadas parciais em $(0,0)$ existam (0,2 Pontos). Mostramos que estas derivadas parciais não existem; logo $\mathfrak{I}$ não é diferenciável em $(0,0)$ e, portanto, não admite plano tangente aí (0,3 Pontos).
- (Solução alternativa) Além disso, $\mathfrak{I}$ não é sequer contínua em $(0,0)$. De fato, tomando coordenadas polares $R = r\cos\theta$, $L = r\sin\theta$, para $(R,L) \neq (0,0)$ temos

$$\mathfrak{I}(R,L) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+w^2L^2}} = \frac{V_0}{r\sqrt{\cos^2\theta + w^2\sin^2\theta}} \geq \frac{V_0}{C\,r},$$

onde $C = \max_\theta \sqrt{\cos^2\theta + w^2\sin^2\theta} > 0$. Assim $\mathfrak{I}(R,L) \to +\infty$ quando $r \to 0^+$. Em particular $\lim_{(R,L)\to(0,0)} \mathfrak{I}(R,L) = +\infty \neq \mathfrak{I}(0,0) = 0$, o que mostra a descontinuidade em $(0,0)$ (0,2 Pontos). Uma função descontínua não pode ter plano tangente no ponto (0,3 Pontos).

Conclusão:

$$\boxed{\text{para } (R,L) \neq (0,0) \text{ as derivadas parciais são } \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial R} = -\frac{V_0 R}{(R^2+w^2L^2)^{3/2}},\ \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial L} = -\frac{V_0 w^2 L}{(R^2+w^2L^2)^{3/2}},}$$

$$\boxed{\text{enquanto em } (0,0) \text{ as derivadas parciais não existem e não há plano tangente.}}$$

Q3. **(3 pontos)** Encontre e classifique os **pontos críticos** da função definida em todo o plano

$$f(x,y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

classificando cada ponto crítico como *máximo local*, *mínimo local* ou *sela*. Justifique todos os passos (cálculo das derivadas parciais, pontos críticos, matriz Hessiana e critérios de segunda derivada).

Solução:

Considere

$$f(x,y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Vamos encontrar todos os pontos críticos e classificálos (máximo local, mínimo local ou sela) usando o teste das segundas derivadas.

Solução:

1. Derivadas parciais e equações críticas.

As derivadas parciais primeiras são

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3, \qquad f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3 \ (0,4 \text{ Pontos}).$$

Pontos críticos são soluções de $f_x = 0$ e $f_y = 0$ simultaneamente. Assim

$$3x^2 - 3 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1 \ (0,4 \text{ Pontos}),$$

$$3y^2 - 3 = 0 \iff y^2 = 1 \iff y = \pm 1 \ (0,4 \text{ Pontos}).$$

Logo os pontos críticos são as quatro combinações

$$\boxed{(1,1), \quad (1,-1), \quad (-1,1), \quad (-1,-1) \ (0,4 \text{ Pontos})}$$

2. Hessiana e teste das segundas derivadas (Critério de Sylvestre).

As segundas derivadas são

$$f_{xx}(x,y) = 6x, \qquad f_{yy}(x,y) = 6y, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0.$$

A matriz Hessiana é diagonal:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} \ (0,2 \text{ Pontos}).$$

No teste das segundas derivadas usamos o discriminante

$$D(x,y) = \det H_f(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (6x)(6y) - 0 = 36xy.$$

Agora avaliamos f_{xx}, f_{yy}, D em cada ponto crítico:

- Em $(1,1)$:
$$f_{xx} = 6, \quad f_{yy} = 6, \quad D = 36 > 0.$$
Como $D > 0$ e $f_{xx} > 0$, o ponto é um *mínimo local* (0,3 Pontos).

- Em $(-1,-1)$:
$$f_{xx} = -6, \quad f_{yy} = -6, \quad D = 36 > 0.$$
Como $D > 0$ e $f_{xx} < 0$, o ponto é um *máximo local* (0,3 Pontos).
- Em $(1,-1)$:
$$f_{xx} = 6, \quad f_{yy} = -6, \quad D = -36 < 0.$$
Como $D < 0$, o ponto é de *sela* (0,3 Pontos).
- Em $(-1,1)$:
$$f_{xx} = -6, \quad f_{yy} = 6, \quad D = -36 < 0.$$
Como $D < 0$, o ponto é de *sela* (0,3 Pontos).

3. Valores da função nos pontos críticos (para referência).

Calculando f em cada ponto crítico:

$$f(1,1) = 1^3 - 3\cdot 1 + 1^3 - 3\cdot 1 = 1 - 3 + 1 - 3 = -4,$$

$$f(-1,-1) = (-1)^3 - 3(-1) + (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 - 1 + 3 = 4,$$
$$f(1,-1) = 1 - 3 - 1 + 3 = 0, \qquad f(-1,1) = -1 + 3 + 1 - 3 = 0.$$

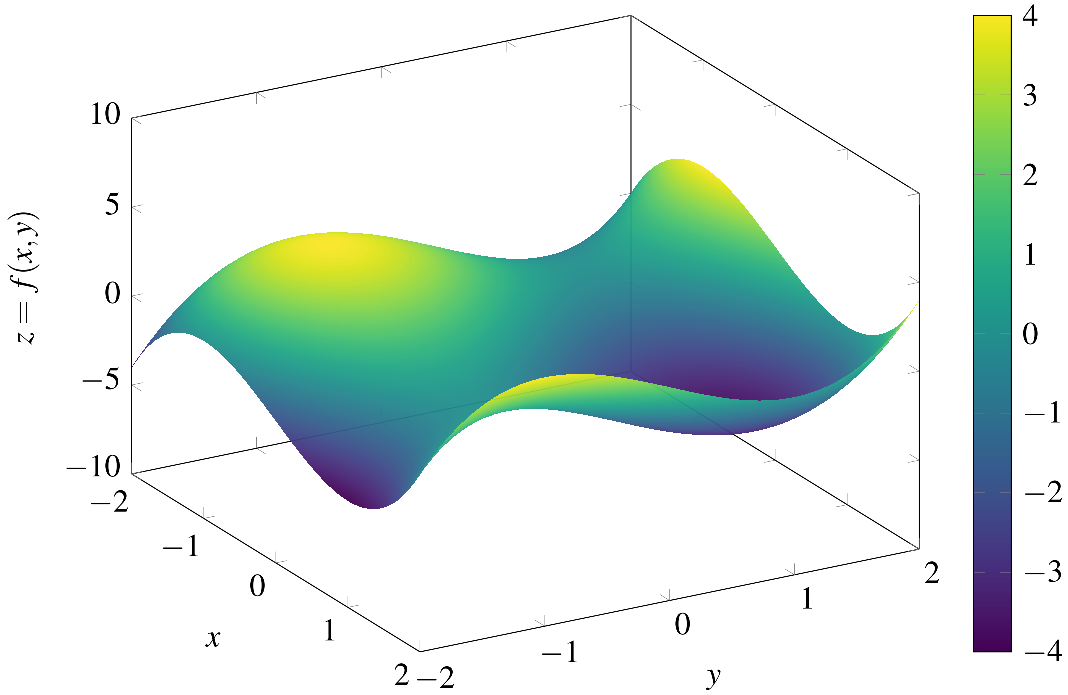
4. Conclusão.

Portanto os pontos críticos e suas classificações são (A pontuação já foi descrita acima):

$$\boxed{(1,1) \text{ mínimo local (valor } f(1,1) = -4),\ (-1,-1) \text{ máximo local (valor } f(-1,-1) = 4),}$$

$$\boxed{(1,-1) \text{ sela (valor } 0),\ (-1,1) \text{ sela (valor } 0).}$$

Observação final: como f é uma soma de termos cúbicos (de grau ímpar), a função não é limitada superiormente nem inferiormente (por exemplo, ao deixar $x \to +\infty$ com y fixo obtemos $f \to +\infty$, e para $x \to -\infty$ obtemos $f \to -\infty$). Assim os extremos encontrados são locais, não globais.



Q4. **(2 pontos)** Utilizando o **Método dos Multiplicadores de Lagrange** encontre o volume máximo de uma caixa retangular que está inscrita em uma esfera de raio $r > 0$ (centrada na origem).

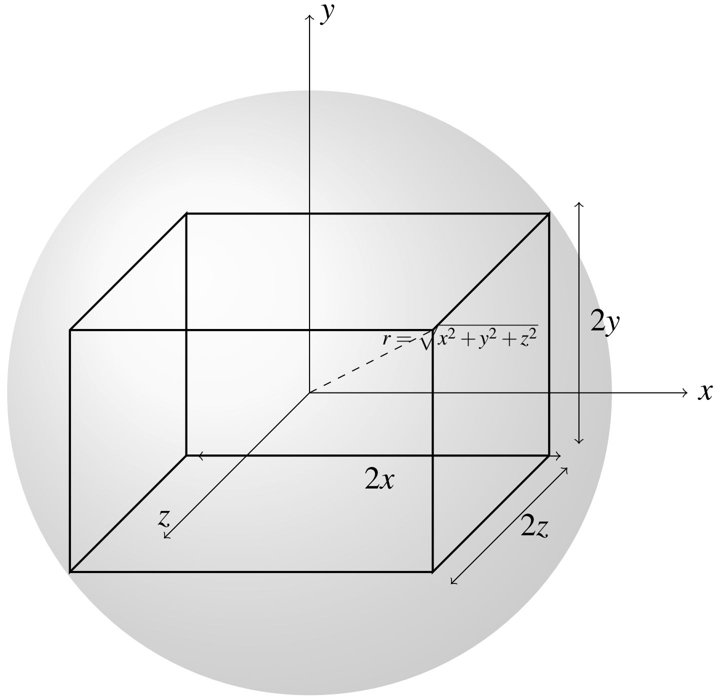


Figura: Caixa retangular inscrita em uma esfera de raio $r > 0$ (centrada na origem).

Solução:

Considere as dimensões da caixa retangular dadas por: $2x$ é a largura, $2y$ é o comprimento e $2z$ é a altura altura.

Assim, queremos maximizar a função volume

$$\mathrm{V}(x,y,z) = (2x)(2y)(2z) = 8xyz$$

sujeito à restrição

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \ (0,3 \text{ Pontos}).$$

Logo, pelo **Método dos Multiplicadores de Lagrange**, o ponto de máximo procurado, caso exista, também satisfaz as equações

$$\nabla\mathrm{V}(x,y,z) = \lambda\nabla g(x,y,z),$$

ou seja,

$$\begin{cases} 8yz = \lambda 2x \\ 8xz = \lambda 2y \\ 8xy = \lambda 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \ (0,4 \text{ Pontos}) \end{cases}.$$

No sistema acima, caso uma das variáveis seja nula, as demais também o serão. Assim, dado que $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, segue que $x, y, z, \lambda \neq 0$. Logo,

$$\frac{8yz}{2x} = \frac{8xz}{2y} = \frac{8xy}{2z} = \lambda \quad \Longrightarrow \quad x^2 = y^2 = z^2 \quad \Longrightarrow \quad |x| = |y| = |z| \ (0,3 \text{ Pontos}).$$

Consequentemente, temos que

$$\boxed{x = y = z, \quad \text{pois} \quad x, y, z > 0 \ (0,3 \text{ Pontos}).}$$

Usando a restrição $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, concluímos que

$$3x^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad x = y = z = \frac{r}{\sqrt{3}} \ (0,3 \text{ Pontos}).$$

Disso segue que

$$\boxed{\mathrm{V}_{\text{Máx}} = \mathrm{V}\left(\frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}}\right) = 8\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{8r^3}{3\sqrt{3}} \quad \text{unidades de volume} \ (0,4 \text{ Pontos}).}$$

Ou seja, o volume máximo ocorre exatamente quando a caixa tem formato cúbico.

Solução alternativa: usando desigualdades entre médias

Sejam x, y, z positivos tais que $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Pela desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica, temos:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \ (0,5 \text{ Pontos}).$$

Substituindo $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, obtemos

$$\frac{r^2}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{r^6}{27} \geq x^2 y^2 z^2 \ (0,5 \text{ Pontos}).$$

Tomando a raíz quadrada, temos

$$\frac{r^2}{3\sqrt{3}} \geq xyz \quad \Rightarrow \quad \mathrm{V}(x, y, z) = 8xyz \leq \frac{8r^3}{3\sqrt{3}} \ (0,5 \text{ Pontos}).$$

A igualdade ocorre se, e somente se,

$$\boxed{x = y = z = \frac{r}{\sqrt{3}} \ (0,5 \text{ Pontos}).}$$

BOA SORTE E SUCESSO A TODA(O)S!